c'est-à-dire :

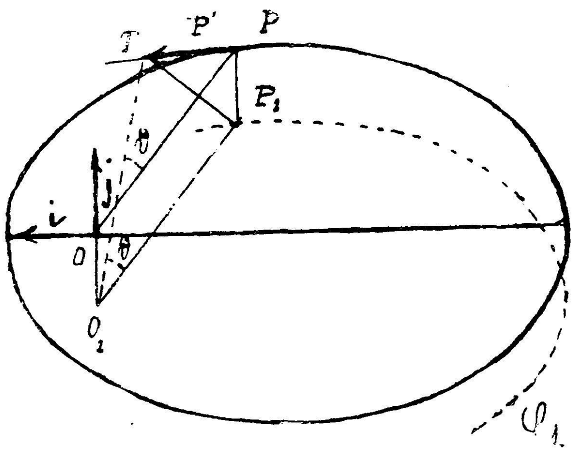
$$\rho_1^2 = \frac{1}{p^2} + \rho^2$$

donc : ρ_1 est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont $\frac{1}{p}$ et ρ sont les côtés de l'angle droit; si ϑ est l'angle des droites TO_1 et PO, en multipliant scalairement (2) par P — O, on a :

$$(T - O_1) \times (P - O) = (P - O)^2 = \rho^2$$

c'est-à-dire :

$$\rho\rho_1 \cos\vartheta = \rho^2 , \qquad \rho_1 \cos\vartheta = \rho .$$



De O_1 conduisons la parallèle à OP et de T la perpendiculaire sur O_1P_1 ; il résulte :

$$O_1P_1 = \rho , \qquad P_1T = \frac{1}{p} ;$$

par conséquent P_1 décrira une ellipse φ_1 semblable et semblablement posée à la trajectoire de P et dont le foyer O_1 se déduit de O par la formule (3). On peut donc conclure :

Si le sommet P_1 *d'un angle droit décrit l'ellipse* φ_1, *tandis que l'un de ses côtés passe constamment par le foyer* O_1, *un point* T, *situé sur l'autre côté à une distance constante* $\frac{1}{p}$ *du sommet, décrira le lieu demandé.*

Armand Palomby (Naples).

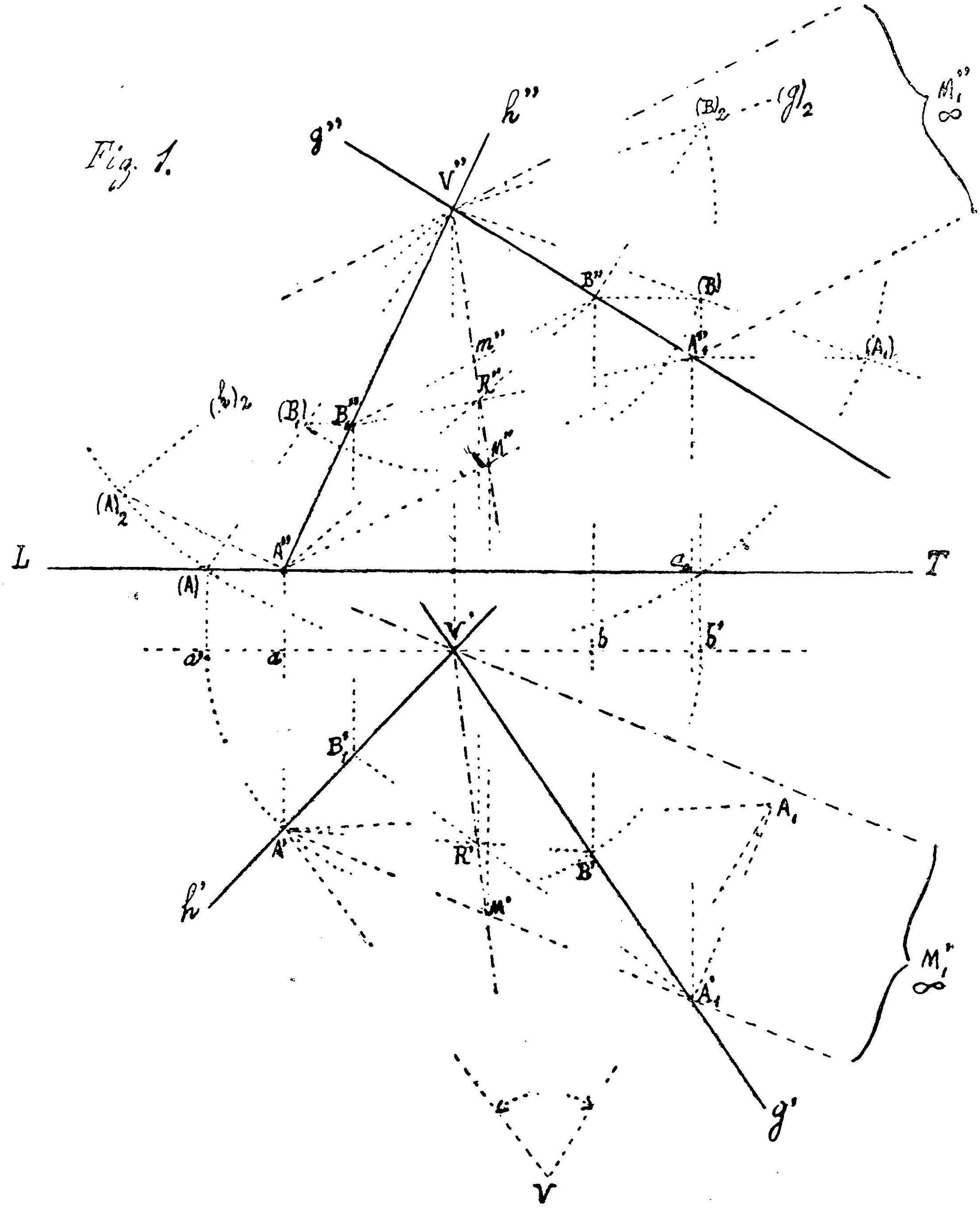
Déterminations directes des projections des bissectrices d'un angle

en Géométrie descriptive dans le système de Monge.

Pour construire les projections des bissectrices d'un angle, on a généralement recours au rabattement et au relèvement du plan de cet angle. Cette méthode est indirecte, et parfois elle n'est guère praticable, par exemple, lorsque, en tout ou en partie, les traces des côtés ne rentrent pas dans les limites de la feuille. Quant aux expédients habituels du changement de plans, de la réduction homothétique ou du *rabattement dans l'espace*, communément en usage, ils ne sont pas directs non plus dans ce cas-là et souvent même ils sont laborieux. En outre, je ferai remarquer que le système de rabattement, tout en étant assez simple, a pourtant l'inconvénient de trop restreindre la figure sur laquelle on opère, au détriment de l'exactitude du tracé.

De sorte qu'il ne me semble pas hors de propos de signaler quelques *solutions directes* de ce problème[1].

Fig. 1.



La première est suggérée par la propriété des bissectrices de l'angle au sommet d'un triangle isocèle : l'une divise la base en parties égales et l'autre lui est parallèle. En même temps on

[1] Des solutions analogues pour la bissection de l'angle dièdre furent déjà indiquées il y a plusieurs années (V. *Atti del Collegio degl' Ing. ed Arch.*, Palermo, 1889, et *Periodico di Matem.*, Livorno, 1908) ; elles auraient dû suivre plutôt que précéder celles que nous venons d'exposer. Mais aujourd'hui seulement elles se sont présentées à mon esprit.

utilise, dans une seconde solution, la symétrie des côtés par rapport à la bissectrice de l'angle, de manière que, dans son plan, une transversale quelconque est coupée par la symétrique en un point de cette bissectrice.

Une dernière solution enfin s'obtient en appliquant le principe

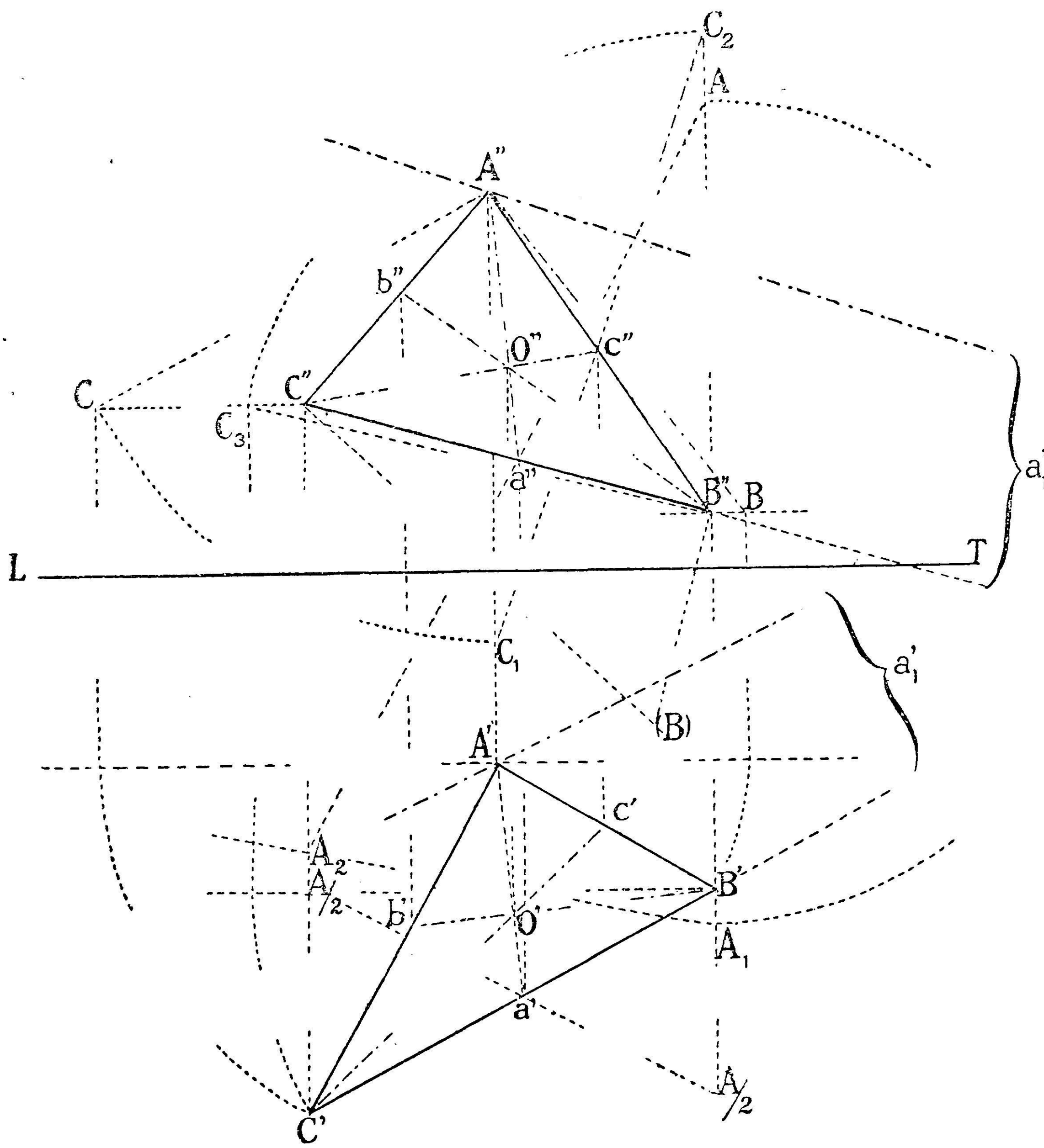


Fig. 2.

connu que les bissectrices de tout angle dans un triangle coupent le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés de l'angle.

La 1[re] *figure* contient les deux premières solutions, et il suffit de noter que si nous considérons, à partir du sommet, deux segments quelconques VA, VB sur les côtés g et h de l'angle donné (uniquement pour des raisons de simplicité choisies de façon que les projections horizontales en soient égales) en les faisant successivement tourner autour de la verticale V, jusqu'à ce qu'ils deviennent parallèles au plan vertical, on obtient là, en véritable grandeur, les dimensions V(A) et V(B), qui se reportent réciproquement en $V(A_1)$ et $V(B_1)$ sur ces droites en construisant leurs projections respectives.

Les points milieux M et *m* des transversales AA_1 et BB_1 (bases, comme on sait, des deux triangles isocèles semblables avec le sommet commun V) et les parallèles menées à ces droites par ce point, donnent les bissectrices demandées VM et VM_1 de l'angle donné. L'une de ces bissectrices est déterminée aussi par l'intersection R des lignes AB_1 et A_1B, relativement à cette bissectrice, et symétriques entre elles.

Remarque. — Les perpendiculaires aux $V''A''$ et $V''B''$ dans leurs extrémités non communes respectivement égales à aA' et à bB' (qui sont les différences entre les distances au plan vertical de V avec A et B) donnent les points $(A)_2$ et $(B)_2$ qui tombent respectivement sur les circonférences de centre V'' déjà indiquées. Ces points permettent encore de trouver de nouveau les vraies grandeurs des segments VA et VB susdits, construction qu'on peut comprendre comme un rabattement sur le plan vertical, de deux plans qui les projettent verticalement.

De même l'hypoténuse du triangle rectangle $A'A_1A'_1$, dont le côté $A_1A'_1 = A''_1a_0$, est comme la base AA_1 du triangle isocèle VAA_1 ; en faisant $A'V$ et VA_1 égaux à AV, l'angle $A'VA$ sera, dans sa vraie grandeur, celui des droites considérées dans l'espace.

La 2^{me} *figure* représente les projections d'un triangle quelconque ABC et des bissectrices de ses angles, obtenues par le principe susdit des segments proportionnels. Cependant il faut trouver avant tout les vraies longueurs $A''C$, $A''B$ et C_3B'' de ses côtés (par la méthode ordinaire, par exemple des rotations) et puis sur les lignes de rappel déjà marquées $A''A'$, $B''B'$, $C''C'$ l'on prend, à partir des parties opposées ou de la même partie, des projections horizontales ou verticales de chaque côté, des segments égaux ou proportionnels aux deux autres côtés. Par exemple l'on trace $C''A^2 = CA''$ (vraie longueur de CA) et $B''A = B''A_1$, tous deux égaux à $A''A$ (vraie longueur de AB) ; alors les transversales AA_2 et A_2A_1 donnent sur $C''B''$ les points a'' et a''_1, qui appartiennent respectivement aux bissectrices de l'angle opposé A. Et si, comme dans notre dessin, le point a''_1 se trouve en dehors du tableau, on considère la bissectrice qui correspond comme 4^{me} harmonique des trois rayons donnés (c'est-à-dire les deux côtés de l'angle et l'autre bissectrice).

Deux bissectrices internes quelconques de ce triangle donnent, comme l'on sait, le centre O du cercle inscrit, dont on ne peut cependant déterminer le rayon par les seules méthodes proposées.

F. P. Paternò (Palerme).