Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 15 (1913)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 27.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur un problème de dynamique.

Réponse à une question proposée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* [1].

Une ellipse est parcourue par un point mobile P *d'un mouvement képlérien (il obéit à la loi des aires, centre des forces un foyer); en chaque point* P *on mène la tangente* PT *telle que* PT *soit le vecteur qui figure la vitesse. Quel est le lieu géométrique du point* T ?

Au centre des forces considérons une terne orthogonale [2] dextrorsum (**i**, **j**, **k**) telle que **i** soit parallèle à l'axe majeur de l'ellipse et **i**, **j** soient parallèles au plan de l'ellipse même ; le vecteur :

$$P' = T - P$$

sera défini par [3] :

$$P' = \frac{1}{p}\left\{\frac{(P - O) \wedge \mathbf{k}}{\rho} - e\mathbf{j}\right\} \tag{1}$$

où p est le paramètre, ρ le module de P — O, e l'excentricité. alors :

$$T - O = (T - P) + (P - O) = \frac{P - O}{p\rho} \wedge \mathbf{k} - \frac{e}{p}\mathbf{j} + (P - O)$$

c'est-à-dire :

$$T - O_1 = \frac{1}{p\rho}(P - O) \wedge \mathbf{k} + (P - O) \tag{2}$$

ayant posé :

$$O_1 = O - \frac{e}{p}\mathbf{j} \ . \tag{3}$$

De (2) on tire :

$$\rho_1^2 = (T - O_1)^2 = \frac{1}{p^2\rho^2}\left\{(P - O) \wedge \mathbf{k}\right\}^2 + (P - O)^2$$

---

[1] Question n° 3972 proposée par M. A. Boutin, *Intermédiaire*, janvier 1912, p. 5.

[2] Burali-Forti et Marcolongo, *Eléments de calcul vectoriel*, Paris, Hermann, 1911.

[3] Marcolongo, *Theoretische Mechanik*, S. 62, erster Bd; Leipzig, Teubner, 1911.

c'est-à-dire :

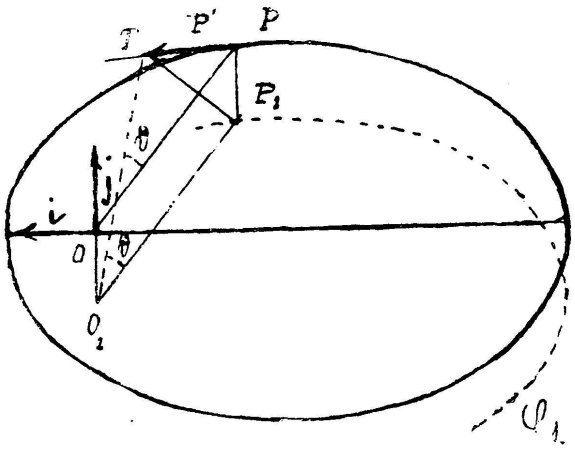
$$\rho_1^2 = \frac{1}{p^2} + \rho^2$$

donc : ρ_1 est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont $\frac{1}{p}$ et ρ sont les côtés de l'angle droit ; si ϑ est l'angle des droites TO_1 et PO, en multipliant scalairement (2) par P — O, on a :

$$(T - O_1) \times (P - O) = (P - O)^2 = \rho^2$$

c'est-à-dire :

$$\rho\rho_1 \cos\vartheta = \rho^2 , \qquad \rho_1 \cos\vartheta = \rho .$$



De O_1 conduisons la parallèle à OP et de T la perpendiculaire sur O_1P_1 ; il résulte :

$$O_1P_1 = \rho , \qquad P_1T = \frac{1}{p} ;$$

par conséquent P_1 décrira une ellipse φ_1 semblable et semblablement posée à la trajectoire de P et dont le foyer O_1 se déduit de O par la formule (3). On peut donc conclure :

Si le sommet P_1 *d'un angle droit décrit l'ellipse* φ_1, *tandis que l'un de ses côtés passe constamment par le foyer* O_1, *un point* T, *situé sur l'autre côté à une distance constante* $\frac{1}{p}$ *du sommet, décrira le lieu demandé.*

Armand Palomby (Naples).

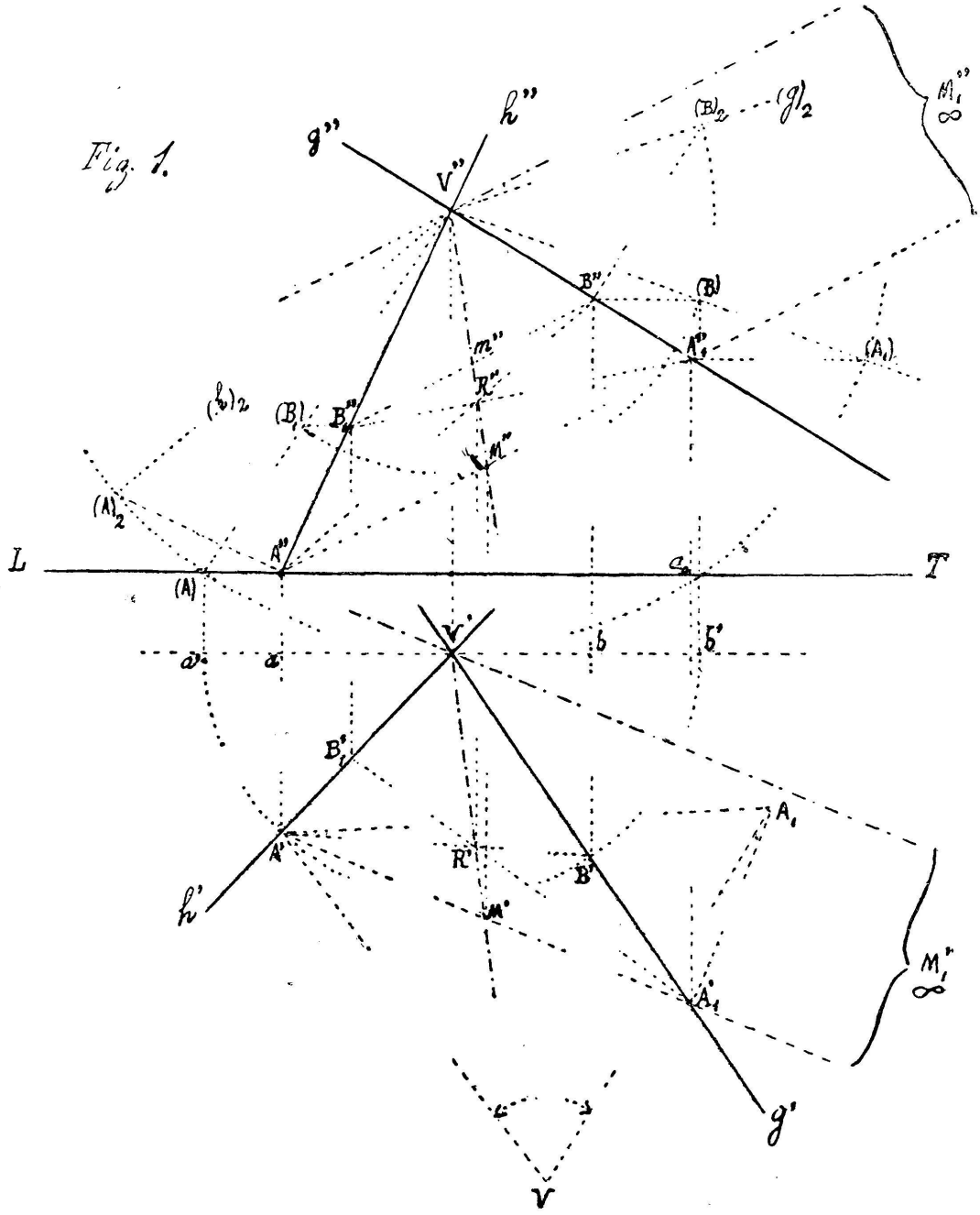
Déterminations directes des projections des bissectrices d'un angle

en Géométrie descriptive dans le système de Monge.

Pour construire les projections des bissectrices d'un angle, on a généralement recours au rabattement et au relèvement du plan de cet angle. Cette méthode est indirecte, et parfois elle n'est guère praticable, par exemple, lorsque, en tout ou en partie, les traces des côtés ne rentrent pas dans les limites de la feuille. Quant aux expédients habituels du changement de plans, de la réduction homothétique ou du *rabattement dans l'espace,* communément en usage, ils ne sont pas directs non plus dans ce cas-là et souvent même ils sont laborieux. En outre, je ferai remarquer que le système de rabattement, tout en étant assez simple, a pour-

tant l'inconvénient de trop restreindre la figure sur laquelle on opère, au détriment de l'exactitude du tracé.

De sorte qu'il ne me semble pas hors de propos de signaler quelques *solutions directes* de ce problème[1].



La première est suggérée par la propriété des bissectrices de l'angle au sommet d'un triangle isocèle : l'une divise la base en parties égales et l'autre lui est parallèle. En même temps on

[1] Des solutions analogues pour la bissection de l'angle dièdre furent déjà indiquées il y a plusieurs années (V. *Atti del Collegio degl'Ing. ed Arch.*, Palermo, 1889, et *Periodico di Matem.*, Livorno, 1908) ; elles auraient dû suivre plutôt que précéder celles que nous venons d'exposer. Mais aujourd'hui seulement elles se sont présentées à mon esprit.

utilise, dans une seconde solution, la symétrie des côtés par rapport à la bissectrice de l'angle, de manière que, dans son plan, une transversale quelconque est coupée par la symétrique en un point de cette bissectrice.

Une dernière solution enfin s'obtient en appliquant le principe

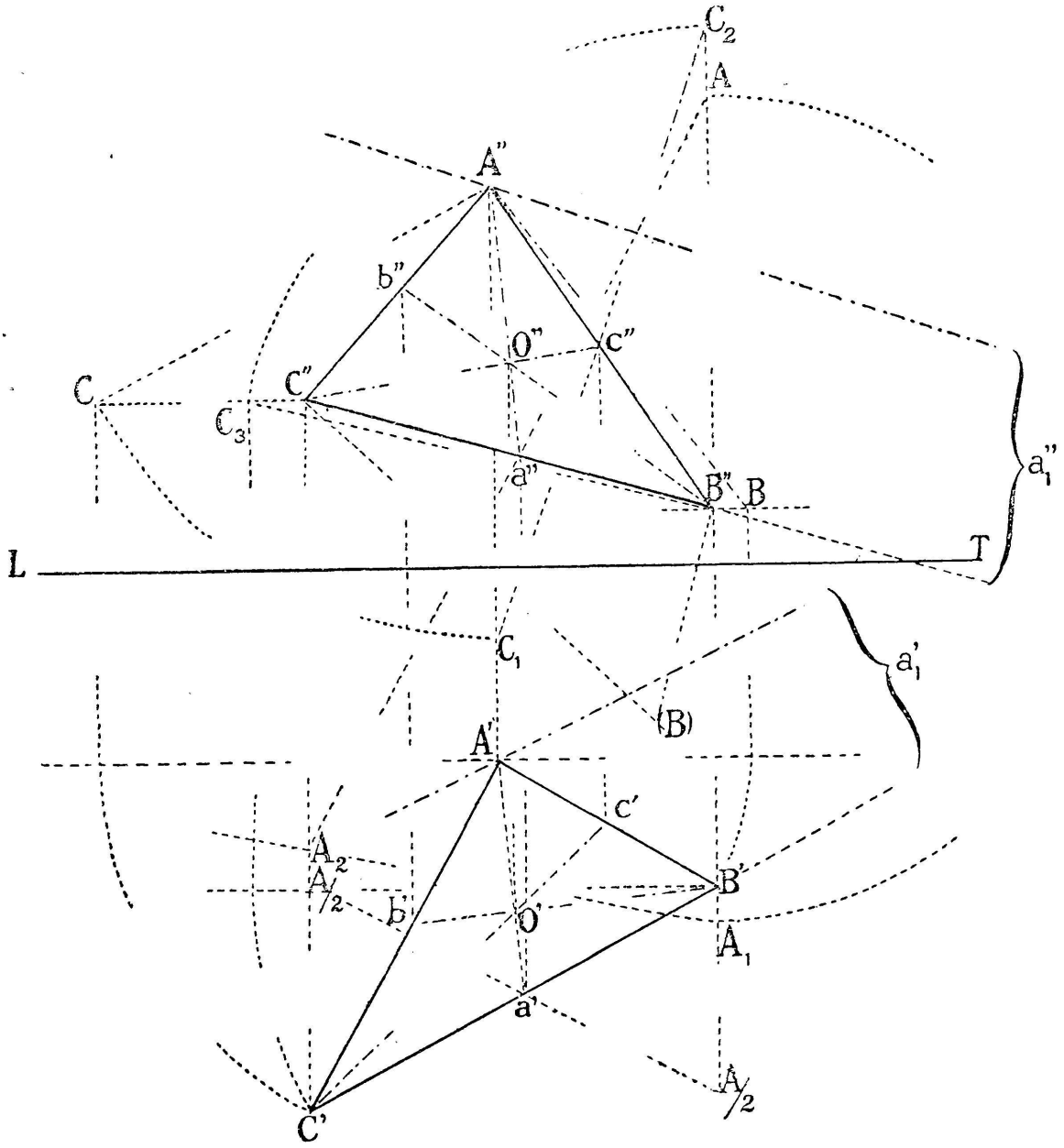


Fig. 2.

connu que les bissectrices de tout angle dans un triangle coupent le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés de l'angle.

La *1re figure* contient les deux premières solutions, et il suffit de noter que si nous considérons, à partir du sommet, deux segments quelconques VA, VB sur les côtés *g* et *h* de l'angle donné (uniquement pour des raisons de simplicité choisies de façon que les projections horizontales en soient égales) en les faisant suc-

cessivement tourner autour de la verticale V, jusqu'à ce qu'ils deviennent parallèles au plan vertical, on obtient là, en véritable grandeur, les dimensions V(A) et V(B), qui se reportent réciproquement en $V(A_1)$ et $V(B_1)$ sur ces droites en construisant leurs projections respectives.

Les points milieux M et *m* des transversales AA_1 et BB_1 (bases, comme on sait, des deux triangles isocèles semblables avec le sommet commun V) et les parallèles menées à ces droites par ce point, donnent les bissectrices demandées VM et VM_1 de l'angle donné. L'une de ces bissectrices est déterminée aussi par l'intersection R des lignes AB_1 et A_1B, relativement à cette bissectrice, et symétriques entre elles.

Remarque. — Les perpendiculaires aux V″A″ et V″B″ dans leurs extrémités non communes respectivement égales à *a*A′ et à *b*B′ (qui sont les différences entre les distances au plan vertical de V avec A et B) donnent les points $(A)_2$ et $(B)_2$ qui tombent respectivement sur les circonférences de centre V″ déjà indiquées. Ces points permettent encore de trouver de nouveau les vraies grandeurs des segments VA et VB susdits, construction qu'on peut comprendre comme un rabattement sur le plan vertical, de deux plans qui les projettent verticalement.

De même l'hypoténuse du triangle rectangle $A'A_1A'_1$, dont le côté $A_1A'_1 = A''_1a_0$, est comme la base AA_1 du triangle isocèle VAA_1; en faisant A′V et VA_1 égaux à AV, l'angle A′VA sera, dans sa vraie grandeur, celui des droites considérées dans l'espace.

La 2me *figure* représente les projections d'un triangle quelconque ABC et des bissectrices de ses angles, obtenues par le principe susdit des segments proportionnels. Cependant il faut trouver avant tout les vraies longueurs A″C, A″B et C_3B'' de ses côtés (par la méthode ordinaire, par exemple des rotations) et puis sur les lignes de rappel déjà marquées A″A′, B″B′, C″C′ l'on prend, à partir des parties opposées ou de la même partie, des projections horizontales ou verticales de chaque côté, des segments égaux ou proportionnels aux deux autres côtés. Par exemple l'on trace $C''A^2 = CA''$ (vraie longueur de CA) et $B''A = B''A_1$, tous deux égaux à A″A (vraie longueur de AB); alors les transversales AA_2 et A_2A_1 donnent sur C″B″ les points *a*″ et a''_1, qui appartiennent respectivement aux bissectrices de l'angle opposé A. Et si, comme dans notre dessin, le point a''_1 se trouve en dehors du tableau, on considère la bissectrice qui correspond comme 4me harmonique des trois rayons donnés (c'est-à-dire les deux côtés de l'angle et l'autre bissectrice).

Deux bissectrices internes quelconques de ce triangle donnent, comme l'on sait, le centre O du cercle inscrit, dont on ne peut cependant déterminer le rayon par les seules méthodes proposées.

F. P. Paternò (Palerme).

Factorisation des grands nombres.

A propos des articles de MM. G. Loria et A. Aubry.

A propos des intéressantes Notes de MM. Loria et Aubry, publiées dans l'*Ens. math.* du 15 mai 1913 (p. 193-231), je me permets de signaler les articles parus en 1902 dans les Actes de l'Académie Royale des Sciences d'Amsterdam[1]. On y trouvera, entre autres, une méthode donnant immédiatement les facteurs du nombre que Mersenne proposa à Fermat pour la factorisation.

Si $G = a^2_1 - b_1$ est le nombre à factoriser, et p est un facteur de G, la différence des restes de a^2_1 et de b_1 après division par p, doit être divisible par p.

Ecrivons

$$G = \left(\frac{G+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{G-1}{2}\right)^2, \qquad \text{si} \qquad \frac{G-1}{2} \equiv r \pmod{p}$$

il faut que

$$\frac{G+1}{2} \equiv r + 1 \pmod{p}.$$

Donc

$$G \equiv (r+1)^2 - r^2 \pmod{p} \qquad \text{ou} \qquad G \equiv 2r + 1 \pmod{p},$$

donc $2r + 1$ doit être divisible par p.

Par exemple : $G = 80047 = (40024)^2 - (40023)^2$

$$G_1 = 40023 = 200^2 + 23,$$

$$\text{ou} \quad G_1 = 200^2 - 1^2 + 24, \quad \text{ou} \quad G_1 = (201 \times 199) + 24.$$

Chacun des diviseurs 199 et 201 donnera 24 comme reste ; mais puisque $2r + 1 = 49$ n'est pas divisible par 199 ou 201, ces deux nombres ne seront pas des diviseurs de G. On peut écrire successivement :

		r	$2r+1$
$G_1 =$	$201 \times 199 +$	24	49
	$202 \times 198 +$	27	55
	$203 \times 197 +$	32	65
	$204 \times 196 +$	39	79
	$205 \times 195 +$	48	97
	$206 \times 194 +$	59	119
	$207 \times 193 +$	72	145
	$208 \times 192 +$	87	175
	$209 \times 191 +$	104	209

[1] Verhandelingen van de K. Academie van Wetenschappen te Amsterdam, 1902, p. 374-384, 474-486, 623-631 et dans l'édition anglaise, p. 326-336, 425-436, 501-508. L'étude parut plus tard en brochure chez l'éditeur Versluys à Amsterdam.

Ce tableau est facilement construit puisque les restes 23, 24, 27, 32, ... ont pour différences 1, 3, 5, ... On trouve 209 comme facteur.

Le nombre $G = 100895598169$ de Mersenne-Fermat égale

$$(50447799085)^2 - (50447799084)^2$$

tandis que

$$50447799084 = 224605^2 + 393059 \quad \text{ou} \quad = (\underline{224606} \times 224605) + 168454$$

$2r + 1 = \underline{336909}$, donc 112303, diviseur commun des nombres soulignés, est un des facteurs de G.

F.-J. Vaes (Rotterdam).

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Sous-Commissions Nationales.

Suisse. — Comme conclusion à ses rapports, la Sous-commission suisse vient de publier un fascicule annexe intitulé « Réformes à accomplir dans l'enseignement mathématique en Suisse, vœux et propositions de la Sous-commission suisse ». Le texte est reproduit dans les trois langues nationales.

L'Enseignement mathématique en Suisse, Rapports publiés sous la direction de H. Fehr. — *Annexe* (34 p., Fr. 0,50 ; Georg & Cie, Genève et Bâle) :

Reformvorschläge und Anregungen aus den Berichten über den mathematischen Unterricht in der Schweiz.

Réformes à accomplir dans l'enseignement mathématique en Suisse.

Riforme da compiere nell'insegnamento delle matematiche nella Svizzera.

Unification de la terminologie dans les théories du potentiel et de l'élasticité.

Sur l'initiative de M. le Prof. A. Korn (Charlottenbourg), il vient de se constituer une commission en vue d'une « *unification par voie d'entente internationale des notations et de la terminologie de la théorie du potentiel et de la théorie de l'élasticité* ». Nous reproduisons ci-après la *première circulaire :*

Il est superflu d'insister sur les grands avantages qu'il y aurait à provoquer une entente entre les travailleurs des diverses natio-