

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	15 (1913)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	SUR LE PROLONGEMENT, PAR CONTINUITÉ. DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE
<b>Autor:</b>	Pompéiu, D.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-14864">https://doi.org/10.5169/seals-14864</a>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

paraissent absurdes au premier abord. C'est ainsi qu'à côté de la science contemplative, une technique a dû se développer, dont le but est strictement utilitaire et qui vise seulement à accroître, par tous les moyens possibles, la puissance de la démonstration. A ne vouloir jamais descendre des cimes splendides qu'elle prétend explorer, la science se condamnerait elle-même à l'impuissance.

Pierre BOUTROUX (Poitiers).

## SUR LE PROLONGEMENT, PAR CONTINUITÉ, DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

1. — Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux domaines, simplement connexes, séparés par une ligne rectifiable  $L$ . Je suppose que les frontières  $C_1$  et  $C_2$  des domaines  $D_1$  et  $D_2$  sont aussi des lignes rectifiables.

Cela étant posé, supposons que dans  $D_1$  se trouve définie une fonction holomorphe  $f_1(z)$  prenant sur  $L$  une suite continue de valeurs ; supposons, de même, que dans  $D_2$  se trouve définie une fonction holomorphe  $f_2(z)$  prenant sur le  $L$  la même suite continue de valeurs que  $f_1(z)$ .

2. — M. Painlevé a démontré (dans sa Thèse : *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, page 27) que la fonction  $f(z)$  définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) && \text{dans le domaine } D_1; \\ f(z) &= f_2(z) && \text{dans le domaine } D_2; \\ f(z) &= f_1(z) = f_2(z) && \text{sur la ligne } L; \end{aligned}$$

est holomorphe dans le domaine  $D$ , obtenu en supprimant la ligne  $L$ .

En d'autres termes : deux fonctions holomorphes, définies dans deux domaines contigus, et se raccordant (les fonctions) par continuité le long de la frontière commune (ligne rectifiable) se prolongent mutuellement et ne forment, dans le *domaine-somme* (obtenu en supprimant la frontière commune) qu'une seule et même fonction holomorphe.

3. — La démonstration de M. Painlevé est basée sur l'intégrale de Cauchy. Je vais donner une autre démonstration<sup>1</sup> basée sur une transformation de la définition des fonctions holomorphes.

<sup>1</sup> T. LEVI-CIVITA, *Sulla continuazione analitica* [Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova, vol. XXVIII, Dispensa I (1912), pp. 3-5].

D'après un théorème de Morera, une fonction  $f(z)$  définie dans un domaine simplement connexe  $D$  est holomorphe dans ce domaine si

- 1° elle est continue dans  $D$  ;
- 2° l'intégrale

$$\int_C f(z) dz$$

est nulle, pour tout contour fermé  $C$  tracé dans  $D$ .

4. — Venons maintenant au théorème de M. Painlevé. On montre immédiatement que la fonction  $f(z)$ , définie au n° 2, satisfait aux conditions de Morera.

D'abord, elle est continue dans le domaine  $D$ .

Ensuite l'intégrale

$$I = \int_C f(z) dz$$

est évidemment nulle si le contour  $C$  est situé tout entier dans  $D_1$  ou dans  $D_2$ . Supposons maintenant que ce contour fermé traverse la ligne  $L$ , et, pour simplifier, supposons que  $C$  traverse  $L$  seulement en deux points :  $\alpha$  et  $\beta$ .

Pour calculer l'intégrale  $I$ , on peut la décomposer en deux autres intégrales :

$$I = I_1 + I_2$$

l'intégrale  $I_1$  étant obtenue en intégrant  $f(z)$  le long d'un contour fermé  $C_1$  formé avec la partie de  $C$  qui se trouve dans  $D_1$  et l'arc  $\alpha\beta$  de la ligne  $L$ ; de même, l'intégrale  $I_2$  étant obtenue par l'intégration de  $f(z)$  le long du contour fermé  $C_2$ , formé de la partie de  $C$ , située dans  $D_2$  et de l'arc  $\alpha\beta$  de la ligne  $L$ .

Mais, à cause de la continuité des fonctions  $f_1(z)$  et  $f_2(z)$  sur  $L$ , on trouve facilement

$$I_1 = 0, \quad I_2 = 0,$$

d'où

$$I = 0.$$

Et, ainsi, la fonction  $f(z)$  satisfait, dans  $D$ , aussi à la seconde condition de Morera. Elle est donc holomorphe dans  $D$ .

5. — L'importance de ce mode de démonstration me semble résider dans ce fait qu'il permet de généraliser le théorème de M. Painlevé et de prolonger, par continuité, des fonctions non-holomorphes.

En effet, reprenons les domaines  $D_1$  et  $D_2$ , définis au n° 1, mais cette fois-ci supposons que l'on définit, dans chacun de ces domaines des fonctions non-holomorphes mais appartenant à la même classe.

Voici ce que j'entends par là.

Lorsqu'une fonction  $f(z)$ , continue, n'est pas holomorphe l'intégrale.

$$I = \int_C f(z) dz$$

prise suivant un contour fermé quelconque  $C$  [tracé dans le domaine où se trouve définie  $f(z)$ ] n'est pas nulle ; mais sa valeur peut s'exprimer quelquefois d'une manière simple en fonction du contour  $C$ . C'est cette manière d'exprimer la valeur de  $I$  en fonction de  $C$  qui sert à caractériser une classe de fonctions, et par suite à distinguer une classe des autres classes de fonctions.

Voici un exemple simple :

Supposons que la valeur de  $I$  est égale à l'aire de la région délimitée par  $C$ , multipliée par l'affixe du centre de gravité de cette région.

Nous avons défini ainsi une classe  $G$  de fonctions non-holomorphes :  $g(z)$ .

6. — Je dis que le théorème de M. Painlevé est généralisable à cette classe de fonctions.

En d'autres termes : si dans le domaine  $D_1$  se trouve définie une fonction  $g_1(z)$  et dans  $D_2$  une fonction de même classe  $g_2(z)$ , et si ces deux fonctions se raccordent par continuité le long de la ligne  $L$  (qui sépare  $D_1$  et  $D_2$ ) la fonction  $g(z)$  définie comme il suit :

$$\begin{aligned} g(z) &= g_1(z) && \text{dans } D_1; \\ g(z) &= g_2(z) && \text{dans } D_2; \\ g(z) &= g_1(z) = g_2(z) && \text{sur } L; \end{aligned}$$

est une fonction qui, dans le domaine-somme  $D$ , appartient à la même classe que  $g_1(z)$  et  $g_2(z)$ .

On n'a qu'à reprendre le mode de raisonnement du n° 4 et à faire usage d'une propriété élémentaire du centre de gravité.

D'ailleurs la classe des fonctions  $g(z)$  peut être définie aussi par un système d'équations aux dérivées partielles absolument analogue au système par lequel Cauchy définit les fonctions holomorphes.

7. — J'ai donné dans une Note des *Comptes Rendus*<sup>1</sup> la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de variable complexe, appartenant à une classe déterminée, soit prolongeable par continuité.

D. POMPÉIU (Bucarest).

<sup>1</sup> T. 156, p. 376, séance du 3 février 1913. Dans cette Note des *Comptes Rendus* se trouve indiquée aussi la démonstration du texte (n° 4). En lisant cette Note, M. le prof. T. Levi-Civita a bien voulu me communiquer qu'il avait, avant moi, donné, dans les *Atti e Memorie* de l'Académie de Padoue, la même démonstration, comme application du théorème de Morera au prolongement des fonctions holomorphes.