Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1913)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN CAS PARTICULIER DU PROBLÈME DE L'ÉLIMINATION ENTRE PLUSIEURS ÉQUATIONS INTÉGRALES

Autor: Cailler, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14851

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 30.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR UN CAS PARTICULIER DU PROBLÈME DE L'ÉLIMINATION ENTRE PLUSIEURS ÉQUATIONS INTÉGRALES

M. Holmgren, par une question posée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*[1], au sujet de l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \int_0^x \frac{\varphi(y)\,dy}{(x-y)^\alpha} = f(x) \ ,$$

attire l'attention sur les équations du type de Volterra dans lesquelles le noyau affecte la forme $h(x-y)$ telles que

$$\varphi(x) - \int_0^x h(x-y)\varphi(y)\,dy = f(x) \ . \tag{1}$$

On connaît la parenté qui relie les équations de ce type aux équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients constants, parenté qui rend vraisemblable à priori leur résolution par des formules élémentaires. On est d'autant mieux fondé à prévoir une semblable résolution que M. Levi-Civita a donné, en 1895[2], la solution générale de l'équation de première espèce correspondant à (1), à savoir

$$\int_0^x h(x-y)\varphi(y)\,dy = f(x) \ . \tag{2}$$

En fait, les deux problèmes (1) et (2) peuvent être facilement réduits l'un à l'autre et ne sauraient être regardés comme essentiellement distincts. En étudiant leur relation, j'ai eu l'occasion

[1] *Interm. des Mathém.*, Tome XIX, p. 102, mars 1912.
[2] *Actes de l'Académie de Turin*, novembre 1895.

de remarquer que le procédé classique, par lequel on élimine plusieurs variables entre des équations linéaires à coefficients constants, peut être immédiatement transporté aux équations intégrales de première et de seconde espèce lorsque tous les noyaux ont la forme $h(x - y)$. Le passage est immédiat et la théorie développée ci-dessous n'est qu'une sorte de duplicata de celle des déterminants de l'algèbre ordinaire. Le problème d'élimination ainsi traité est sans doute bien particulier par suite de la forme toute spéciale des noyaux; mais l'analogie dont il s'agit le rend néanmoins intéressant et justifiera peut-être les quelques lignes que je vais lui consacrer.

Mes remarques ont leur origine naturelle dans ma *Note sur une opération analytique et son application aux fonctions de Bessel*[1].

Nommons, pour abréger, *produit intégral* de n fonctions $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... , $a_n(x)$ d'une variable x l'intégrale multiple

$$x^{n-1} \int \dots \int a_1(x_1 x)\, a_2(x_2 x) \dots a_n(x_n x)\, dt \ . \tag{3}$$

exécutée dans l'espace $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ à $(n - 1)$ dimensions[2]. L'élément de cet espace, ou dt, est égal à $dt = dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}$; la lettre x_n, introduite par raison de symétrie, est telle qu'on a identiquement

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \ ; \tag{4}$$

enfin le champ d'intégration est défini par les n inégalités

$$0 \leq x_i \leq 1 \ , \qquad (i = 1, 2, \dots n) \ . \tag{5}$$

Le facteur x^{n-1} de la formule (3) y a été introduit de manière à permettre pour le produit intégral — que je désignerai souvent par $[a_1 a_2 a_3 \dots a_n]$ — la notation suivante

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = \int \int \dots \int a_1(x_1)\, a_2(x_2) \dots a_n(x_n)\, dt \ , \tag{6}$$

les variables x_i étant cette fois soumises aux restrictions que voici

$$0 \leq \frac{x_i}{x} \leq 1 \ , \qquad \text{et} \qquad x_1 + x_2 + \dots + x_n = x \ . \tag{7}$$

---

[1] *Mém. de la Soc. de Phys. et d'Hist. nat. de Genève*, vol. 34 (1904).

[2] Cette notion de *produit intégral* qui s'introduit ici est formée sur le modèle des *noyaux itérés* des théories générales.

En prenant cette seconde forme, on a, par exemple, pour deux facteurs

$$[a_1 a_2] = \int_0^x a_1(y)\, a_2(x-y)\, dy = \int_0^x a_2(y)\, a_1(x-y)\, dy \,. \tag{8}$$

Bien entendu le produit intégral de n facteurs $a_1 \dots a_n$ dépend de leur ensemble et non pas simplement de leur produit algébrique effectué; ainsi, avant de calculer une expression telle que $[p]$, il importe de connaître le mode de formation de la quantité p, notamment le nombre de facteurs, ou de *dimensions*, qu'elle contient. Par exemple, si a est de première dimension, c'est-à-dire facteur unique, je prendrai par convention $[a] = a$; au contraire

$$[a, 1] = \int_0^x a(z)\, dz = \int_0^x a(x-z)\, dz$$

comme on vient de voir. De même

$$[1] = 1 \qquad [11] = x \qquad [111] = \frac{x^2}{2}\,, \qquad \text{etc.}$$

Le symbole $[a_1 a_2 \dots a_n]$ possède les propriétés classiques de la multiplication ordinaire. Quand on applique, par exemple à la définition (3), la règle du jacobien, on constate immédiatement la symétrie des n dimensions $x_1, x_2, \dots x_n$. En prenant pour coordonnées $x_2, x_3, \dots, x_n$ au lieu de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, l'élément dt se change en $dx_2 dx_3 \dots dx_n$; comme d'autre part les conditions (4) et (5) qui définissent le champ d'intégration sont aussi symétriques, on voit que le produit intégral $[a_1 a_2 \dots a_n]$ est *commutatif* comme ne dépendant pas de l'ordre des facteurs.

La propriété *associative*, d'après laquelle pour opérer la multiplication de plusieurs facteurs on peut remplacer quelques-uns d'entre eux par leur produit effectué, demeure aussi inaltérée. Pour le faire voir, il suffira de vérifier l'équation

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = [a_1 a_2 \dots a_{n-2} [a_{n-1} a_n]] \tag{9}$$

qui redonne le cas général par alternance et répétition.

Or mettons le produit $[a_1 a_2 \dots a_n]$, ou (3), sous la forme

$$x^{n-2} \int_{(n-2)} \dots \int a_1(x_1 x) \dots a_{n-2}(x_{n-2} x)\, dx_1 \dots dx_{n-2}$$
$$\left\{ x \int a_{n-1}(x_{n-1} x)\, a_n(x_n x)\, dx_{n-1} \right\} . \tag{10}$$

Alors, dans l'intégrale simple réservée à droite pour être exécutée la première, faisons

$$x_{n-1}x = y \qquad 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-2} = u \ ,$$

d'où

$$x dx_{n-1} = dy \qquad x_n x = (1 - x_1 - \ldots - x_{n-1})x = xu - y \ ;$$

l'intégrale en accolade est ainsi devenue

$$\int_0^{xu} a_{n-1}(y)\, a_n(xu - y)\, dy \ ,$$

c'est, d'après (8), la fonction $[a_{n-1} a_n]$ une fois la variable x remplacée par xu, ou $x(1 - x_1 - x_2 \ldots - x_{n-2})$. On n'a plus besoin que de reprendre la définition (3) pour reconnaître dans (10) le second membre de la propriété associative (9).

L'extension au produit intégral de la propriété *distributive* nécessite quelques précautions.

Si les a, b, c, ... sont des quantités de première dimension, ainsi que les totaux $a_1 + a_2 + \ldots$, $b_1 + b_2 + \ldots$ etc., le produit intégral

$$[(a_1 + a_2 + \ldots)(b_1 + b_2 + \ldots)(c_1 + \ldots) \ldots]$$

a un sens complètement déterminé par nos précédentes conventions. Pour le calculer, il faut, conformément à l'équation (3), intégrer le dit produit après avoir remplacé x par $x_1 x$ dans tous les a, par $x_2 x$ dans tous les b, etc. La règle de multiplication des polynômes, équivalente à la propriété distributive, se trouve exacte ainsi qu'on le constate immédiatement.

Prenons le cas un peu plus général d'une expression polynôme P, dont tous les termes sont de même dimension; on a, par exemple, sans introduire explicitement des coefficients numériques qui peuvent être réunis aux facteurs algébriques

$$\mathrm{P} = a_1 a_2 \ldots a_m + b_1 b_2 b_3 \ldots b_m + c_1 c_2 \ldots c_m + \ldots \ . \qquad (11)$$

Nous prendrons comme définition du symbole [P], non encore rencontré jusqu'ici, l'équation

$$[\mathrm{P}] = [a_1 a_2 \ldots a_m] + [b_1 b_2 \ldots b_m] + [c_1 c_2 \ldots c_m] + \ldots \qquad (12)$$

Cette valeur est naturellement entièrement différente de celle qu'on trouverait en traitant P comme une fonction toute donnée en x. Pour trouver la valeur exacte, il faut éviter dans (11) toute réduction de facteurs ou de termes semblables, traiter en un mot

les constituants a, b, c ... comme autant de fonctions indépendantes et indéterminées. La remarque que voici donne le moyen d'étendre aux polynômes du type P les règles ordinaires de l'algèbre.

Soient P et Q deux polynômes respectivement de $m^{\text{ième}}$ et de $n^{\text{ième}}$ dimension, ou

$$P = a_1 a_2 \dots a_m + b_1 b_2 \dots b_m + \dots$$

$$Q = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n + \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n + \dots ;$$

leur produit algébrique étant du type P, on trouve immédiatement par la règle précédente

$$[PQ] = [a_1 a_2 \dots a_m \alpha_1 \dots \alpha_n] + [a_1 \dots a_m \beta_1 \dots \beta_n] + [b_1 \dots b_m \alpha_1 \dots \alpha_n] + \dots$$

D'autre part, les fonctions [P] et [Q] étant toutes calculées, ainsi

$$[P] = [a_1 a_2 \dots a_m] + [b_1 b_2 \dots b_m] + \dots \qquad [Q] = [\alpha_1 \dots \alpha_n] + [\beta_1 \dots \beta_n] + \dots ,$$

en appliquant à ces fonctions [P], [Q], où les crochets dans les seconds membres sont de première dimension, la règle distributive démontrée plus haut, on a

$$[[P][Q]] = [a_1 \dots a_m \alpha_1 \dots \alpha_n] + [a_1 a_2 \dots \beta_1 \dots \beta_n] + \dots$$

Ainsi, on aura

$$[PQ] = [[P][Q]] ,$$

et de même

$$[PQR] = [[P][Q][R]] = [P[QR]] = [[P][QR]] .$$

De là résulte enfin que si l'expression P se présentait sous la forme

$$P = EFG \dots + E'F'G' \dots + E''F''G'' \dots + \dots ,$$

où les E, F, G, ... sont des polynômes contenant les facteurs constituants a, b, c, ... , comme on a évidemment

$$[P] = [EFG \dots] + [E'F'G' \dots] + [E''F''G'' \dots] + \dots ,$$

on aurait aussi, pour réduire le nombre des facteurs, la formule

$$[P] = [[E][F][G] \dots] + [[E'][F'][G'] \dots] + \dots$$

En un mot, les opérations algébriques sont possibles à condition de mettre entre crochets les facteurs polynômes dont on veut opérer le produit. Nous allons avoir l'occasion d'appliquer cette remarque.

Tout ceci étant bien compris, je passe à la notion fondamentale pour la suite, du *déterminant intégral*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [a_{ij}] \ .$$

Ici tous les a_{ij} fonctions de x sont supposés de première dimension; ce sont les constituants. Si nous développons le déterminant nous avons un polynôme du type P; $[a_{ij}]$ n'est autre chose que la somme des produits intégraux des n^2 termes de P, c'est, si l'on veut encore, l'intégrale multiple

$$x^{n-1} \int\int \dots \int \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} dt$$

où les notations sont celles des formules (3) à (6), et dans laquelle les $a_{ij}(x)$ de la $j^{\text{ième}}$ colonne sont remplacés par $a_{ij}(x_j x)$.

Cette définition du déterminant intégral $\Delta = [a_{ij}]$ laisse intactes la plupart des propriétés du déterminant algébrique ordinaire $D = |a_{ij}|$; pour s'en assurer, il suffit d'invoquer les propriétés des produits intégraux de la forme [P] dont il a été question à l'instant. Voici quelques-unes de ces propriétés.

Le changement des lignes en colonnes et des colonnes en lignes est sans effet.

Si on développe la quantité $D = |a_{ij}|$ suivant les éléments d'une ligne et qu'on désigne en général par b_{ij} le mineur de l'élément a_{ij}, on a les identités algébriques

$$a_{1i}b_{1j} + a_{2i}b_{2j} + \dots + a_{ni}b_{nj} = \begin{matrix} D & \text{si} & i = j \\ 0 & \text{si} & i \neq j \ . \end{matrix} \tag{13}$$

Or les éléments b_{ij} sont de la $(n-1)^{\text{ième}}$ dimension par rapport aux données a_{ij}; si on désigne par β_{ij} le *produit intégral* de b_{ij}, on trouve immédiatement en exécutant l'opération [] sur les deux membres de l'équation (13),

$$[a_{1i}\beta_{1j}] + [a_{2i}\beta_{2j}] + \dots [a_{ni}\beta_{nj}] = \begin{matrix} \Delta & \text{si} & i = j \\ 0 & \text{si} & i \neq j \ . \end{matrix} \tag{14}$$

Les déterminants intégraux $\beta_{ij} = [b_{ij}]$, sont les *mineurs intégraux* de D.

Soient deux déterminants $D = |a_{ij}|$ et $D' = |a'_{ij}|$, les éléments constituants a et a' étant de première dimension; soient encore

Δ et Δ' les déterminants intégraux correspondants $\Delta = [D]$ et $\Delta' = [D']$. Le produit DD' est du type P, on a donc

$$[DD'] = [\Delta\Delta'] = [D\Delta'] = [D'\Delta] \ . \tag{15}$$

D'autre part, opérons le produit DD' par la règle classique de la multiplication des déterminants, nous aurons pour ce produit un déterminant dont les éléments tels que

$$c_{ij} = a_{1i}a'_{1j} + a_{2i}a'_{2j} + \dots a_{ni}a'_{nj}$$

sont des types E, F, G, ... ; ainsi nous aurons encore la quantité $[DD']$ en calculant le déterminant intégral dont les éléments sont $[c_{ij}]$, avec

$$c_{ij} = [a_{1i}a'_{1j}] + [a_{2i}a'_{2j}] + \dots + [a_{ni}a'_{nj}] \ .$$

Prenons en particulier pour D' le déterminant aux éléments $\beta_{ij} = [b_{ij}]$ et soient $\Delta = [a_{ij}]$, $\Delta' = [\beta_{ij}]$; dans ce cas, à cause des identités (14), c_{ij} est nul sauf dans la diagonale principale, pour laquelle $c_{ii} = \Delta$. En vertu de (15), nous trouvons alors

$$[\Delta\Delta'] = [\underbrace{\Delta \, . \, \Delta \dots \Delta}_{(n)}] \ .$$

Si donc $\Delta \neq 0$, et que l'équation intégrale $[\Delta\varphi] = f$ n'admette qu'une solution, nous tirons pour la valeur du *déterminant intégral adjoint* Δ'

$$\Delta' = [\Delta^{n-1}] = [\underbrace{\Delta \, . \, \Delta \dots \Delta}_{(n-1)}] \ .$$

Sans insister davantage sur ces relations qu'on pourrait, bien entendu, étendre et multiplier en suivant les analogies que suggère immédiatement l'algèbre élémentaire, j'aborde le problème d'élimination dont il a été question ci-dessus et qu'il est maintenant aisé de résoudre à l'aide de l'algorithme des déterminants intégraux.

Prenons un système de n équations intégrales à n^2 noyaux $h_{ij}(x - y)$; ce sont les équations suivantes

$$\sum_{i}^{1,n} \int_0^x h_{ji}(x - y)\varphi_i(y)\,dy = u_j(x) \qquad (j = 1, 2, \dots n) \tag{16}$$

avec les n inconnues $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ et les seconds membres $u_1, u_2, \dots u_n$. L'élimination, toujours possible, va réduire le sys-

tème à un autre analogue, mais où les inconnues sont séparées, et tel que

$$\int_0^x \Delta(x-y)\varphi_j(y)\,dy = U_j(x) \ . \tag{17}$$

Pour démontrer ce point, j'écris le système (16) sous la forme

$$[h_{j1}\varphi_1] + [h_{j2}\varphi_2] + \dots [h_{jn}\varphi_n] = u_j \ ; \qquad (j = 1, \dots n) \tag{18}$$

on va le résoudre, par les propriétés des déterminants intégraux, exactement de la même manière qu'un système linéaire de l'algèbre ordinaire. Formons un déterminant intégral en prenant les h_{ij} comme éléments constituants, et soit $\Delta = [h_{ij}]$; désignons les mineurs intégraux de Δ par η_{ij}.

Multiplions l'équation (18) par η_{ji}, soumettons les deux membres à l'opérateur [ ] et sommons pour les diverses valeurs de j ; le premier membre s'écrit alors

$$\sum_{j,k}^{1,n}\sum [\eta_{ji}[h_{j,k}\varphi_k]] = \sum_k^{1,n} [\varphi_k \sum_j^{1,n} [\eta_{ji}h_{jk}]] \ ,$$

il se réduit simplement, en vertu des formules (14), à l'expression

$$[\Delta\varphi_i] \ .$$

Le second membre a donné, de son côté, la quantité connue

$$U_i = \sum_j^{1,n} [\eta_{ji}u_j] \ . \qquad (i = 1, 2, 3 \dots n)$$

On a donc bien démontré que les solutions éventuelles du système (16) vérifient le système (17) ; l'inverse est vrai, en général, et se démontre de la même manière.

Prenons la formule (17), soit

$$[\Delta\varphi_i] = \sum_k^{1,n} [\eta_{ki}u_k] \ .$$

On tire de là

$$\sum_i^{1,n} [h_{ji}[\Delta\varphi_i]] = \sum_i^{1,n}\sum_k^{1,n} [u_k h_{ji}\eta_{ki}]$$

ou encore, toujours par les mêmes formules (14),

$$\left[\Delta\left[\sum_i^{1,n} [h_{ji}\varphi_i] - u_j\right]\right] = 0 \ . \tag{19}$$

Si donc on sait que l'équation *homogène*

$$\int_0^x \Delta(x-y)\varphi(y)\,dy = 0$$

n'admet d'autre solution que $\varphi(y) = 0$, l'équation (19) montre que (16) est une conséquence de (17).

Le cas des équations de seconde espèce se ramène immédiatement au précédent ; pour le faire voir, posons un système tel que

$$l_{j1}\varphi_1 + l_{j2}\varphi_2 + \dots + l_{jn}\varphi_n + [h_{j1}\varphi_1] + [h_{j2}\varphi_2] + \dots [h_{jn}\varphi_n] = u_j$$
$$(j = 1 \dots n) \qquad (20)$$

où les h_{ij} sont toujours les noyaux fonctions de la seule différence $x - y$, et les l des facteurs constants. Intégrons l'équation (20), entre les limites 0 et x ; et rappelons que l'intégrale $\int_0^x a(z)\,dz$ est égale à la quantité $[a\,.\,1]$. Alors en posant

$$l_{ij} - [h_{ij}\,,\,1] = a_{ij} = l_{ij} - \int_0^x h_{ij}\,dx$$

on obtient immédiatement le système de première espèce

$$[a_{j1}\varphi_1] + [a_{j2}\varphi_2] + \dots + [a_{jn}\varphi_n] = \int_0^x u_j(x)\,dx\ . \qquad (21)$$

Les solutions du système (20) appartiennent à (21) ; réciproquement les solutions de (21) vérifient (20) comme le montre une simple dérivation. Une condition nécessaire pour que (20) soit résoluble, quels que soient les seconds membres u_j continus en x, est que le déterminant intégral des quantités a_{ij} soit différent de zéro.

Laissant de côté plusieurs remarques que suggère évidemment la théorie des équations algébriques linéaires, j'ajoute quelques mots encore sur le problème auquel on sera finalement toujours conduit, celui d'une équation intégrale unique

$$[\Delta\varphi] = u\ , \qquad \text{ou} \qquad \int_0^x \Delta(x-y)\varphi(y)\,dy = u(x)\ . \qquad (22)$$

C'est celle de M. Levi-Civita ; elle correspond, peut-on dire, au problème de la *division intégrale*.

Pour le résoudre, on peut souvent adopter une méthode très simple adaptée à la forme des singularités du noyau autour de l'origine; cette marche est naturelle, car pour la possibilité du problème, la donnée $u(x)$ doit ordinairement présenter à l'origine une allure particulière déterminée par celle de Δ.

Supposons, par exemple, que Δ soit tel que l'équation $[\Delta\Delta'] = 1$, c'est-à-dire

$$\int_0^x \Delta(y)\,\Delta'(x-y)\,dy = 1 \tag{23}$$

admette une solution Δ', continue, sauf peut-être à l'origine. De (22), on tire alors

$$[\Delta'[\Delta\varphi]] = [[\Delta\Delta']\varphi] = [\varphi \cdot 1] = [u\,\Delta'] \ ,$$

ce qui équivaut à l'équation intégrale

$$\int_0^x \varphi(y)\,dy = \int_0^x u(y)\,\Delta'(x-y)\,dy$$

ou

$$\varphi(y) = \frac{d}{dx}\int_0^x u(y)\,\Delta'(x-y)\,dy \ .$$

Comme généralisation, supposons Δ tel que l'on puisse satisfaire

$$[\Delta\Delta'] = \int_0^x \Delta(y)\,\Delta'(x-y)\,dy = x^n \ , \tag{24}$$

n étant un nombre entier et positif. En raisonnant comme tout à l'heure, nous amenons (22) à la forme

$$[\varphi x^n] = \int_0^x (x-y)^n\,\varphi(y)\,dy = \int_0^x u(x-y)\,\Delta'(y)\,dy \ ,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\varphi(x) = \frac{1}{n!}\,\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\int_0^x u(y)\,\Delta'(x-y)\,dy \ ^{1}.$$

On agirait de la même manière si n cessait d'être entier et positif;

[1] Bien entendu, cette solution, de même que la précédente, doit être vérifiée à posteriori; ce contrôle sera toujours facile.

la détermination de la fonction Δ' réduira toujours l'équation (22) à une équation intégrale d'Abel, facilement résoluble comme on sait.

Il est sans doute ordinairement tout aussi difficile de dégager l'inconnue Δ' des formules (23) et (24) que φ de la proposée (22), et le détour ne réalise aucun avantage signalé sur les formules de M. Levi-Cività. Mais lorsque Δ est une fonction holomorphe autour de l'origine, Δ' l'est aussi et sa détermination n'offre pas de difficultés ; la méthode esquissée ci-dessus devient alors très pratique et donne, d'une manière rapide et élégante, la solution cherchée. Je vais, en terminant, l'appliquer à un exemple où Δ est analytique, mais non pas holomorphe à l'origine.

Soit $\Delta(x)$ de la forme

$$\Delta(x) = x^{\alpha-1}(a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots) , \tag{25}$$

l'exposant α étant compris entre 0 et 1 et le coefficient a_0 différent de zéro. Prenons

$$\Delta'(x) = x^{-\alpha}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) , \tag{26}$$

et substituons ces valeurs (25) et (26) dans l'intégrale (23). En opérant formellement les calculs sur les séries du premier membre et utilisant le résultat connu

$$\int_0^1 y^\gamma (1-y)^\delta dy = \frac{\gamma!\,\delta!}{(\gamma+\delta+1)!} ,$$

on trouve, pour déterminer les inconnues $b_0, b_1, \ldots b_m$, l'équation

$$a_0 b_0 (\alpha - 1)!\,(-\alpha)! = 1 ,$$

et la récurrence

$$a_0 b_m = \sum_p^{1,m} \frac{(m-\alpha-p)!\,(p+\alpha-1)!}{(m-\alpha)!\,(\alpha-1)!} a_p b_{m-p} . \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{27}$$

Considérons les séries

$$\delta(x) = a_0(\alpha-1)! - \sum_p^{1,\infty} (p+\alpha-1)!\, a_p x^p = a'_0 - \sum_p^{1,\infty} a'_p x^p ,$$

et

$$\delta'(x) = b_0(-\alpha)! + \sum_p^{1,\infty} (p-\alpha)!\, b_p x^p = b'_0 + \sum_p^{1,\infty} b'_p x^p ,$$

portons dans la récurrence (27) les valeurs

$$a_p = \frac{a'_p}{(p+\alpha-1)!} \qquad b_p = \frac{b'_p}{(p-\alpha)!} .$$

elle devient

$$b'_m a'_0 = \sum_p^{1,m} a'_p b'_{m-p} .$$

C'est celle même que fournit la méthode des coefficients indéterminés appliquée à l'équation

$$\delta(x)\delta'(x) = 1 .$$

Pour trouver les b_m et Δ', il suffira donc d'ordonner le quotient $\frac{1}{\delta}$ suivant les puissances de x en posant

$$\delta' = \frac{1}{\delta} = \sum_m^{0,\infty} b'_m x^m ;$$

on aura ensuite

$$b_m = \frac{b'_m}{(m-\alpha)!} , \qquad \text{et} \qquad \Delta'(x) = x^{-\alpha} \sum_m^{0,\infty} \frac{b'_m x^m}{(m-\alpha)!} .$$

C'est la règle de la réduite de Laplace que j'ai déjà développée dans le mémoire cité plus haut.

Si la série $\delta(x)$ est convergente, la convergence de $\delta'(x)$, et à fortiori celle de $\Delta'(x)$, est assurée ; on peut ajouter que même si $\delta(x)$ est divergente, mais que α soit inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$, $\Delta'(x)$ est encore convergente.

Pour faire voir ce point, reprenons la récurrence (27) ; nous obtenons une majorante en remplaçant tous les a_p par leurs valeurs absolues $\alpha_p = |a_p|$, et le coefficient numérique

$$\frac{(m-\alpha-p)!\,(p+\alpha-1)!}{(m-\alpha)!\,(\alpha-1)!}$$

par son maximum. Ce maximum, on le montre aisément, s'obtient quand m est donné pour une des valeurs extrêmes $p = 1$ ou $p = m$; les valeurs asymptotiques des termes correspondants se déterminent par la formule de Stirling, ils valent respectivement

$$\frac{\alpha!}{(\alpha-1)!}\,\frac{1}{m} , \qquad \text{et} \qquad \frac{(-\alpha)!}{(\alpha-1)!\,m^{1-2\alpha}} .$$

Ainsi, dans le cas mentionné $\alpha \leqq \frac{1}{2}$, le coefficient numérique est borné supérieurement. Si A est la borne supérieure, la majorante cherchée sera

$$\alpha_0 \beta_m = A \sum_p^{1,m} \alpha_p \beta_{m-p} \; ; \tag{28}$$

si l'on prend $\beta_0 = |b_0|$, on tire de (28) des β_m tels que $\beta_m \geqq |b_m|$. Posons dès lors

$$a(x) = \alpha_0 - \sum_p^{1,\infty} \alpha_p x^p \; , \qquad \text{et} \qquad b(x) = \sum_p^{0,\infty} \beta_p x^p \; ,$$

la détermination (28) des β_m est celle qui résulte de la condition

$$\alpha_0 b(x) + A b(x)(a(x) - \alpha_0) = \alpha_0 \beta_0 \; ,$$

ou

$$b(x) = \frac{\alpha_0 \beta_0}{\alpha_0 + A(a(x) - \alpha_0)} \; .$$

Or, d'après notre hypothèse, $a(x)$ est convergent, donc $b(x)$ le sera dans un certain domaine et $\Delta'(x)$ à fortiori. Le rayon de convergence certaine de $\Delta'(x)$ est égal soit à celui de $\Delta(x)$, soit encore au module de la plus petite racine de l'équation

$$A a(x) + \alpha_0 (1 - A) = 0 \; .$$

Pour finir, appliquons ces généralités à un exemple analogue à celui de M. Holmgren, en considérant l'équation

$$\int_0^x y^{\alpha-1} R(y^\beta) f(x-y)\, dy = \varphi(x) \tag{29}$$

où $R(y^\beta)$ désigne un polynôme en y^β ne s'annulant pas à l'origine, et β un exposant positif qu'on devrait supposer entier pour rester dans le cadre des explications précédentes, mais qui peut être en réalité quelconque. Je ne résous d'ailleurs (29) que pour le seul cas $\varphi(x) = 1$, ce qui suffit, comme on a vu plus haut.

Prenons les réduites de Laplace. Celle de $y^{\alpha-1} R(y^\beta)$ est évidemment de la forme $y^{\alpha-1} P(y^\beta)$, où P désigne un nouveau polynôme possédant un terme constant; celle de $\Delta'(x)$, où $f(x)$, sera donc égale au rapport $x^{-\alpha} : P(x^\beta)$.

Appliquons à ce rapport la décomposition en éléments simples;

la réduite de $f(x)$ se présente alors comme la réunion d'un certain nombre de termes des formes

$$A\frac{x^{-\alpha}}{1-ax^{\beta}}, \qquad \text{et} \qquad A\frac{x^{-\alpha}}{(1-ax^{\beta})^{p}}, \qquad (p = \text{entier})$$

Développées en séries, ces fonctions s'écrivent

$$A\sum_{n}^{0,\infty} a^n x^{\beta n-\alpha}, \qquad \text{et} \qquad A\sum_{n}^{0,\infty} a^n \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{1.2.3\dots n} x^{\beta n-\alpha};$$

ainsi, et telle est la solution, l'inconnue $f(x)$ se compose d'un nombre fini de fonctions analytiques des formes

$$Ax^{-\alpha}\sum_{n}^{0,\infty}\frac{a^n x^{\beta n}}{(\beta n-\alpha)!}$$

et

$$Ax^{-\alpha}\sum_{n}^{0,\infty}\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{1.2.3\dots n}\frac{a^n x^{\beta n}}{(\beta n-\alpha)!}.$$

Les fonctions précédentes sont évidemment apparentées aux fonctions de Bessel.

Posons, pour abréger,

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x, a) = \sum_{n}^{0,\infty}\frac{a^n x^{\beta n+\alpha}}{(\beta n+\alpha)!};$$

on démontre immédiatement l'équation

$$(a-b)\int_0^x \varphi_{\alpha,\gamma}(y, a)\varphi_{\beta,\gamma}(x-y, b)\,dy = \varphi_{\alpha',\gamma}(x, a) - \varphi_{\alpha',\gamma}(x, b),$$

ou bien

$$(a-b)\int_y^x \varphi_{\alpha,\gamma}(x-\xi, a)\varphi_{\beta,\gamma}(\xi-y, b)\,d\xi = \varphi_{\alpha',\gamma}(x-y, a) - \varphi_{\alpha',\gamma}(x-y, b),$$

avec $\alpha' = \alpha+\beta-\gamma+1$. Dans le cas particulier $\alpha = \beta = \alpha' = \gamma-1$, l'identité précédente devient simplement

$$(a-b)\int_y^x \varphi_{\alpha,\alpha+1}(x-\xi, a)\varphi_{\alpha,\alpha+1}(\xi-y, b)\,d\xi$$
$$= \varphi_{\alpha,\alpha+1}(x-y, a) - \varphi_{\alpha,\alpha+1}(x-y, b).$$

On y reconnaît l'équation caractéristique des résolvantes d'un noyau donné, et on conclut que la fonction $\varphi_{\alpha,\alpha+1}(x-y,\lambda)$ est la résolvante du noyau

$$K(x,y) = \varphi_{\alpha,\alpha+1}(x-y,0) = \frac{(x-y)^{\alpha}}{\alpha!} \qquad \text{pour} \qquad x > y\ ,$$

$$K(x,y) = 0 \qquad \text{pour} \qquad x < y\ .$$

C. Cailler (Genève).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Une nouvelle définition des points d'inflexion des courbes planes.

1. La symétrie par rapport à un point nous fournit une définition facile des points d'inflexion des courbes planes, tandis que la symétrie par rapport à un axe rend évidente la propriété du cercle osculateur.

Rappelons tout d'abord les principes suivants faciles à saisir.

2. Etant donnés deux axes rectangulaires quelconques :

a) Les deux points symétriques d'un point par rapport aux deux axes sont aussi symétriques par rapport à l'origine. Il en est de même pour deux figures symétriques d'une figure tracée dans le plan de deux axes.

b) Réciproquement : étant donnés un segment rectiligne quelconque et deux axes rectangulaires passant par son point milieu, les points symétriques des extrémités par rapport à ces axes coïncideront entre eux.

c) Les deux segments symétriques d'un segment rectiligne passant par l'origine, contiennent ce point, sont égaux et en ligne droite.

3. Théorème I. — Si l'on construit les deux courbes symétriques d'une courbe plane par rapport à deux axes orthogonaux dont l'origine est un point quelconque de la courbe, et si l'on groupe deux à deux, d'une façon convenable, les segments suivant lesquels ces diverses courbes (y compris la courbe donnée) sont divisées par l'origine, on y discernera quatre courbes, deux d'entre elles ayant à cette origine un point d'inflexion et les deux