UN THÉORÈME SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

Soient K une hyperbole équilatère et un triangle inscrit ABC. Soit O un point quelconque de la courbe, menons OA, OB, OC et abaissons d'un point quelconque S de l'hyperbole les perpendiculaires sur les droites OA, OB, OC ; ces perpendiculaires couperont les côtés BC, AC, BA du triangle ABC en trois points α, β, γ, situés en ligne droite.

Le théorème résulte du théorème général que nous avons publié dans ce journal (n° 3, 10^e année, mai 1908), et dont voici l'énoncé :

Soient une conique K et un triangle inscrit A, B, C. Soit M, une droite quelconque prise dans le plan de la conique ; déterminons sur cette droite deux divisions homographiques telles que les points d'intersection de la droite avec la conique en soient les points doubles. Nous prendrons pour les points de la première division les intersections c, a, b, de la droite M avec les côtés AB, BC, CA du triangle ; a_1, b_1, c_1 sont les points correspondants de l'autre division. Soit D un point quelconque de la conique : *Les droites* Da_1, Db_1, Dc_1 *couperont les côtés* BC, CA, AB *du triangle en trois points* α, β, γ, *situés sur la même droite.*

Nous établirons d'abord le lemme suivant :

Soient S le centre de deux faisceaux S $(a, b, c...)$ et S$(a_1\ b_1\ c_1...)$, en involution, et n et n_1 deux rayons correspondants perpendiculaires. Si dans l'un de ces faisceaux, soit S $(a, b, c,...)$ nous faisons correspondre aux rayons $a, b, c,...$ les rayons $a_2, b_2, c_2, ...$, qui sont perpendiculaires aux rayons $a_1, b_1, c_1, ...$, nous obtenons un nouveau faisceau S $(a_2, b_2, c_2, ...)$, et les faisceaux S $(a, b, c, ...)$ et S$(a_2, b_2, c_2, ...)$ sont homographiques et les rayons doubles de ces faisceaux sont les rayons n et n_1.

La démonstration du théorème de l'hyperbole est facile.

Dans le quadrilatère OABC, les rayons OA et BC, OB et AC, OC et AB forment sur la droite de fuite une involution et les rayons perpendiculaires, qui correspondent l'un à l'autre, en cette involution déterminent les directions asymptotiques de l'hyperbole équilatère passant par les points O, A, B, C.

Si nous menons par le point O les rayons OA_1, OB_1, OC_1 parallèles aux droites BC, AC, BA et les rayons OA_2, OB_2, OC_2 perpendiculaires à OA, OB, OC, il résulte du lemme cité que les rayons doubles de deux faisceaux homographiques O $(A_2, B_2, C_2, ...)$ et O $(A_1, B_1, C_1, ...)$ déterminent les directions asymptotiques de l'hyperbole. Ces faisceaux déterminent aussi sur la droite de fuite deux divisions homographiques et les points doubles de ces divisions sont les points d'intersection de la droite de fuite avec l'hyperbole ; nous pouvons donc appliquer le théorème général cité et on obtient le théorème proposé.

Problème. Le théorème permet de résoudre le problème suivant : Soient ABC un triangle et un point O ; trouver les points tels que les perpendiculaires abaissées de ce point sur les droites OA, OB, OC rencontrent les côtés BC, AC, BA en points situés sur la droite. Le lieu de ces points est l'hyperbole équilatère passant par les points A, B, C, O.

Cas particulier. — Nous savons que l'hyperbole équilatère, passant par les sommets d'un triangle ABC, passe aussi par le point d'intersection des hauteurs de ce triangle ; cette remarque fournit le théorème suivant :

Soient un triangle ABC et un point O. Joignons OA, OB, OC et menons par le point S, qui est l'intersection des hauteurs du triangle, les perpendiculaires aux droites OA, OB, OC. Ces perpendiculaires couperont les côtés BC, CA, BA en trois points situés en ligne droite.

Ant. Pleskot (Pilsen, Bohême).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur les rayons de courbure principaux en un point d'une quadrique.

A propos d'une Note de M. Turrière.

Cette Note m'a été inspirée par la lecture d'un très intéressant article de M. Turrière (*Enseignement mathématique* du 15 mars 1911) et par la correspondance que j'ai eue avec M. Turrière à cette occasion.

M. Turrière rappelait un théorème de Steiner qui peut s'énoncer ainsi : *Soit* C *le centre de courbure d'une conique pour un point* M, *soit* M' *le conjugué de* M *sur le cercle* MC *par rapport au cercle orthoptique on a*

$$MM' + MC = 0 \ . \qquad (I)$$