Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1912)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXTRACTION D'UNE RACINE QUELCONQUE D'UN NOMBRE RÉEL A

Autor: Baatard, Lucien

Kapitel: I. —A est une puissance nième parfaite.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14281

EXTRACTION D'UNE RACINE QUELCONQUE D'UN NOMBRE RÉEL A[1]

I. — A est une puissance $n^{\text{ième}}$ parfaite.

Posons

$$A = a^n .$$

1. — Considérons une valeur approchée *par excès* de a et représentons-la par $a + \alpha$.

On a :

$$\frac{A}{(a+\alpha)^{n-1}} = \frac{a^n}{a^{n-1} + \frac{n-1}{1}\alpha a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\alpha^2 a^{n-3} + \dots + \alpha^{n-1}}$$

$$= a - (n-1)\alpha + \frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}} ,$$

en posant

$$R = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\alpha^2 a^{n-2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^3 a^{n-3} + \dots$$

$$+ \frac{ln(n-1)(n-2)\dots(n-l)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (l+1)}\alpha^{l+1} a^{n-(l+1)} + \dots + (n-1)\alpha^n .$$

Dans le calcul littéral, la division s'arrête ici ; mais dans le calcul numérique la division $\frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}}$ pourra donner encore quelques unités.

Si l'on écrit

$$\frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}} = \varepsilon + \frac{r}{(a+\alpha)^{n-1}} \qquad \left\{ r < (a+\alpha)^{n-1} \right\} ,$$

on a en résumé

$$\frac{A}{(a+\alpha)^{n-1}} = a - (n-1)\alpha + \varepsilon + \frac{r}{(a+\alpha)^{n-1}} \qquad \left\{ r < (a+\alpha)^{n-1} \right\} .$$

[1] Communication présentée à Soleure, le 1er août 1911, à la Section mathématique de la 94e réunion de la Société helvétique des Sciences naturelles.

En additionnant le quotient incomplet $a - (n-1)\alpha + \varepsilon$ avec $(n-1)(a+\alpha)$ et divisant le tout par n, on obtient

$$\frac{a-(n-1)\alpha+\varepsilon+(n-1)(a+\alpha)}{n} = a + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Le quotient incomplet de cette division est la racine cherchée a ou, si $\varepsilon > n$, une valeur approchée par excès de cette racine.

Applications.

1. — $\sqrt[5]{1\,889\,568}$

$$a+\alpha = 20\ ; \qquad 20^4 = 160000\ ; \qquad 1889568 : 160000 = 11 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{11 + 4 \cdot 20}{5} = 18 \text{ quot. inc.} = \sqrt[5]{1889568}$$

2. — $\sqrt[3]{79507}$

$$a+\alpha = 50 \qquad 79507 : 50^2 = 31 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{31 + 2 \cdot 50}{3} = 43 \text{ quot. inc.} = \sqrt[3]{79507}$$

En prenant comme valeur approchée 60, au lieu de 50, on obtient

$$79507 : 60^2 = 22 \text{ quot. inc.}\ ; \qquad \frac{22 + 2 \cdot 60}{3} = 47 \text{ quot. inc.}\ ;$$

le calcul donne une valeur *approchée par excès* de la racine.

3. — $\sqrt{917764}$

$$a+\alpha = 1000\ ; \qquad \frac{1000 + 917}{2} = 958 \text{ quot. inc.} = \sqrt{917764}\ .$$

2. — Considérons maintenant une valeur approchée *par défaut* de a et représentons-la par $a - \alpha$.

On a :

$$\frac{A}{(a-\alpha)^{n-1}} = \frac{a^n}{a^{n-1} - \frac{n-1}{1}\alpha a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2}\alpha^2 a^{n-3} - \ldots \pm \alpha^{n-1}}$$

$$= a + (n-1)\alpha + \frac{R'}{(a-\alpha)^{n-1}},$$

en posant

$$R' = \frac{n(n-1)}{1\,,\,2}\alpha^2 a^{n-2} - \frac{2n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3 a^{n-3} + \dots$$

$$\pm \frac{ln(n-1)(n-2)\dots(n-l)}{1\,,\,2\,,\,3\,\dots\,(l+1)}\alpha^{l+1} a^{n-(l+1)} \mp \dots \pm (n-1)\alpha^n\ .$$

R′ est-il positif?

On peut écrire

$$R' = a^n - [a + (n-1)\alpha](a-\alpha)^{n-1}$$

$$= [(a-\alpha) + \alpha]^n - [(a-\alpha)^n + n\alpha(a-\alpha)^{n-1}]\ .$$

Or

$$[(a-\alpha)+\alpha]^n = (a-\alpha)^n + \frac{n}{1}\alpha(a-\alpha)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,,\,2}\alpha^2(a-\alpha)^{n-2}$$

$$+ \dots + \alpha^n\ .$$

Donc

$$R' = \frac{n(n-1)}{1\,,\,2}\alpha^2(a-\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,,\,2\,,\,3}\alpha^3(a-\alpha)^{n-3} + \dots + \alpha^n\ ;$$

R′ *est toujours positif.*

Comme on peut avoir $R' > (a-\alpha)^{n-1}$, posons

$$\frac{R'}{(a-\alpha)^{n-1}} = \varepsilon' + \frac{r'}{(a-\alpha)^{n-1}} \qquad \left\{ r' < (a-\alpha)^{n-1} \right\}\ .$$

En opérant comme avec la valeur approchée par excès, on obtient

$$\frac{a + (n-1)\alpha + \varepsilon' + (n-1)(a-\alpha)}{n} = a + \frac{\varepsilon'}{n}$$

et l'on aboutit à la même conclusion.

Applications.

1\. — $\sqrt[6]{191\ 102\ 976}$

$$a - \alpha = 20\ ; \qquad 191\ 102\ 976 : 20^5 = 59 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{59 + 5\,.\,20}{6} = 26 \text{ quot. inc.}$$

$26^5 = 11\ 881\ 376$; 26 est plus grand que la racine cherchée.

Répétant l'opération avec 26, on obtient :

$$191\ 102\ 976 : 11\ 881\ 376 = 16 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{16 + 5 \,.\, 26}{6} = 24 \text{ quot. inc.} = \sqrt[6]{191\ 102\ 976}\ .$$

2. — $\sqrt[4]{131\ 079\ 601}$

$$a - \alpha = 100\ ; \qquad 131\ 079\ 601 : 100^3 = 131 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{131 + 3 \,.\, 100}{4} = 107 \text{ quot. inc.} = \sqrt[4]{131\ 079\ 601}\ .$$

3. — $\sqrt{4\ 613\ 904}$

$$a - \alpha = 2000\ ; \qquad 4\ 613\ 904 : 2000 = 2306 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{2306 + 2000}{2} = 2153\ .$$

Il faut répéter l'opération :

$$4\ 613\ 904 : 2153 = 2143 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{2143 + 2153}{2} = 2148 = \sqrt{4\ 613\ 904}\ .$$

Formule (ω). Représentons par $a \pm \alpha$ une valeur approchée par excès ou par défaut de $\sqrt[n]{\mathrm{A}}$ et par p le quotient incomplet de la division de A par $(a \pm \alpha)^{n-1}$.

Il résulte de ce qui précède que le nombre v_1, donné par la formule (ω)

$$v_1 = \frac{p + (n-1)(a \pm \alpha)}{n} \text{ quot. inc. },$$

est ou $\sqrt[n]{\mathrm{A}}$ ou une valeur approchée par excès de $\sqrt[n]{\mathrm{A}}$.

Si l'on n'obtient pas tout de suite $\sqrt[n]{\mathrm{A}}$, on opère sur v_1 comme sur $a \pm \alpha$ et ainsi de suite.

II. — $\sqrt[n]{\mathrm{A}}$ est un nombre irrationnel.

Si l'on représente par x et $x + 1$ les deux nombres consécutifs entre les $n^{\text{ièmes}}$ puissances desquels se trouve A, la formule (ω) donne x ou une valeur approchée par excès de x.