EXTRACTION D'UNE RACINE QUELCONQUE D'UN NOMBRE RÉEL A

Autor(en): **Baatard, Lucien**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1912)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-14281

EXTRACTION D'UNE RACINE QUELCONQUE D'UN NOMBRE RÉEL A[1]

I. — A est une puissance $n^{\text{ième}}$ parfaite.

Posons

$$A = a^n .$$

1. — Considérons une valeur approchée *par excès* de a et représentons-la par $a + \alpha$.

On a :

$$\frac{A}{(a+\alpha)^{n-1}} = \frac{a^n}{a^{n-1} + \frac{n-1}{1}\alpha a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\alpha^2 a^{n-3} + \dots + \alpha^{n-1}}$$

$$= a - (n-1)\alpha + \frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}} ,$$

en posant

$$R = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\alpha^2 a^{n-2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^3 a^{n-3} + \dots$$

$$+ \frac{ln(n-1)(n-2)\dots(n-l)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (l+1)}\alpha^{l+1} a^{n-(l+1)} + \dots + (n-1)\alpha^n .$$

Dans le calcul littéral, la division s'arrête ici ; mais dans le calcul numérique la division $\frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}}$ pourra donner encore quelques unités.

Si l'on écrit

$$\frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}} = \varepsilon + \frac{r}{(a+\alpha)^{n-1}} \qquad \left\{ r < (a+\alpha)^{n-1} \right\} ,$$

on a en résumé

$$\frac{A}{(a+\alpha)^{n-1}} = a - (n-1)\alpha + \varepsilon + \frac{r}{(a+\alpha)^{n-1}} \qquad \left\{ r < (a+\alpha)^{n-1} \right\} .$$

---

[1] Communication présentée à Soleure, le 1er août 1911, à la Section mathématique de la 94e réunion de la Société helvétique des Sciences naturelles.

En additionnant le quotient incomplet $a - (n-1)\alpha + \varepsilon$ avec $(n-1)(a+\alpha)$ et divisant le tout par n, on obtient

$$\frac{a-(n-1)\alpha+\varepsilon+(n-1)(a+\alpha)}{n} = a + \frac{\varepsilon}{n}\,.$$

Le quotient incomplet de cette division est la racine cherchée a ou, si $\varepsilon > n$, une valeur approchée par excès de cette racine.

Applications.

1\. — $\sqrt[5]{1\,889\,568}$

$$a+\alpha = 20\,; \qquad 20^4 = 160000\,; \qquad 1889568 : 160000 = 11 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{11+4\,.\,20}{5} = 18 \text{ quot. inc.} = \sqrt[5]{1889568}$$

2\. — $\sqrt[3]{79507}$

$$a+\alpha = 50 \qquad 79507 : 50^2 = 31 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{31+2\,.\,50}{3} = 43 \text{ quot. inc.} = \sqrt[3]{79507}$$

En prenant comme valeur approchée 60, au lieu de 50, on obtient

$$79507 : 60^2 = 22 \text{ quot. inc.}\,; \qquad \frac{22+2\,.\,60}{3} = 47 \text{ quot. inc.}\,;$$

le calcul donne une valeur *approchée par excès* de la racine.

3\. — $\sqrt{917764}$

$$a+\alpha = 1000\,; \qquad \frac{1000+917}{2} = 958 \text{ quot. inc.} = \sqrt{917764}\,.$$

2. — Considérons maintenant une valeur approchée *par défaut* de a et représentons-la par $a - \alpha$.

On a :

$$\frac{A}{(a-\alpha)^{n-1}} = \frac{a^n}{a^{n-1} - \frac{n-1}{1}\alpha a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\alpha^2 a^{n-3} - \ldots \pm a^{n-1}}$$

$$= a + (n-1)\alpha + \frac{R'}{(a-\alpha)^{n-1}}\,,$$

en posant

$$R' = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\alpha^2 a^{n-2} - \frac{2n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3 a^{n-3} + \dots$$

$$\pm \frac{ln(n-1)(n-2)\dots(n-l)}{1\,.\,2\,.\,3\dots(l+1)}\alpha^{l+1}a^{n-(l+1)} \mp \dots \pm (n-1)\alpha^n .$$

R′ est-il positif?

On peut écrire

$$R' = a^n - [a + (n-1)\alpha](a-\alpha)^{n-1}$$
$$= [(a-\alpha)+\alpha]^n - [(a-\alpha)^n + n\alpha(a-\alpha)^{n-1}] .$$

Or

$$[(a-\alpha)+\alpha]^n = (a-\alpha)^n + \frac{n}{1}\alpha(a-\alpha)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\alpha^2(a-\alpha)^{n-2}$$
$$+ \dots + \alpha^n .$$

Donc

$$R' = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\alpha^2(a-\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3(a-\alpha)^{n-3} + \dots + \alpha^n ;$$

R′ *est toujours positif.*

Comme on peut avoir $R' > (a-\alpha)^{n-1}$, posons

$$\frac{R'}{(a-\alpha)^{n-1}} = \varepsilon' + \frac{r'}{(a-\alpha)^{n-1}} \qquad \left\{ r' < (a-\alpha)^{n-1} \right\} .$$

En opérant comme avec la valeur approchée par excès, on obtient

$$\frac{a + (n-1)\alpha + \varepsilon' + (n-1)(a-\alpha)}{n} = a + \frac{\varepsilon'}{n}$$

et l'on aboutit à la même conclusion.

Applications.

1\. — $\sqrt[6]{191\ 102\ 976}$

$$a - \alpha = 20 ; \qquad 191\ 102\ 976 : 20^5 = 59 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{59 + 5\,.\,20}{6} = 26 \text{ quot. inc.}$$

$26^5 = 11\ 881\ 376$; 26 est plus grand que la racine cherchée.

Répétant l'opération avec 26, on obtient :

$$191\ 102\ 976 : 11\ 881\ 376 = 16 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{16 + 5 \cdot 26}{6} = 24 \text{ quot. inc.} = \sqrt[6]{191\ 102\ 976}\ .$$

2. — $\sqrt[4]{131\ 079\ 601}$

$$a - \alpha = 100\ ; \qquad 131\ 079\ 601 : 100^3 = 131 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{131 + 3 \cdot 100}{4} = 107 \text{ quot. inc.} = \sqrt[4]{131\ 079\ 601}\ .$$

3. — $\sqrt{4\ 613\ 904}$

$$a - \alpha = 2000\ ; \qquad 4\ 613\ 904 : 2000 = 2306 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{2306 + 2000}{2} = 2153\ .$$

Il faut répéter l'opération :

$$4\ 613\ 904 : 2153 = 2143 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{2143 + 2153}{2} = 2148 = \sqrt{4\ 613\ 904}\ .$$

Formule (ω). Représentons par $a \pm \alpha$ une valeur approchée par excès ou par défaut de $\sqrt[n]{A}$ et par p le quotient incomplet de la division de A par $(a \pm \alpha)^{n-1}$.

Il résulte de ce qui précède que le nombre v_1, donné par la formule (ω)

$$v_1 = \frac{p + (n - 1)(a \pm \alpha)}{n} \text{ quot. inc.}\ ,$$

est ou $\sqrt[n]{A}$ ou une valeur approchée par excès de $\sqrt[n]{A}$.

Si l'on n'obtient pas tout de suite $\sqrt[n]{A}$, on opère sur v_1 comme sur $a \pm \alpha$ et ainsi de suite.

II. — $\sqrt[n]{A}$ est un nombre irrationnel.

Si l'on représente par x et $x + 1$ les deux nombres consécutifs entre les $n^{\text{ièmes}}$ puissances desquels se trouve A, la formule (ω) donne x ou une valeur approchée par excès de x.

Pour s'en rendre compte, il suffit de poser

$$A = x^n + h$$

et de remplacer a par x dans les calculs précédents ; h s'ajoute à R ou R′ et la conclusion pour a subsiste pour x.

Ex. : $\sqrt[3]{72\,000}$

$$a - \alpha = 40 \;; \qquad 72\,000 : 40^2 = 45 \;; \qquad \frac{45 + 2 . 40}{3} = 41 \text{ quot. inc.}$$

$$41^3 = 68\,921 < 72\,000$$

$$42^3 = 74\,088 > 72\,000 .$$

Pour obtenir $\sqrt[n]{A}$ à moins de $\frac{1}{z}$ près, par défaut, on a la relation

$$\sqrt[n]{A} = \frac{1}{z}\sqrt[n]{z^n . A} \;;$$

on calcule, comme ci-dessus, $\sqrt[n]{z^n . A}$ à moins d'une unité près, par défaut, et on divise le résultat par z.

Ex. : Soit à calculer $\sqrt[3]{10}$ à moins de $\frac{1}{100}$ près.

$$\sqrt[3]{10} = \frac{1}{100}\sqrt[3]{10\,000\,000}$$

$$a - \alpha = 200 \;; \quad 10\,000\,000 : 200^2 = 250 \;; \quad \frac{250 + 2 . 200}{3} = 216 \text{ quot. inc.}$$

$$216^2 = 46\,656$$

$$10\,000\,000 : 46\,656 = 214 \text{ quot. inc. } ; \quad \frac{214 + 2 . 216}{3} = 215 \text{ quot. inc.}$$

$$2{,}15 = \sqrt[3]{10} \text{ , à moins de } \frac{1}{100} \text{ près, par défaut.}$$

Utilisation des quotients complets : *formule* (ω'). En prenant les quotients complets p' et y_1 des divisions qui donnent p et v_1, on obtient un nombre fractionnaire qui exprime la valeur de $\sqrt[n]{A}$ avec une erreur par excès ; l'application du même calcul à y_1 donnera un nouveau nombre fractionnaire $y_2 > \sqrt[n]{A}$ mais $< y_1$; on obtiendra de même $y_3 > \sqrt[n]{A}$ mais $< y_2$, et ainsi de suite.

Ce calcul se représente par la formule (ω')

$$y_1 = \frac{p' + (n-1)(a \pm \alpha)}{n} .$$

L'erreur diminue assez fortement quand on passe de l'un de ces résultats au suivant.

A titre d'exemple, reprenons $\sqrt[3]{10}$.

$$a - \alpha = 2 \ ; \qquad \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \ ; \qquad \frac{\frac{5}{2} + 2 . 2}{3} = \frac{13}{6} = 2{,}1666 \ldots$$

$$10 : \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{360}{169} \ ; \qquad \frac{\frac{360}{169} + \frac{2 . 13}{6}}{3} = \frac{3277}{1521} = 2{,}1545 \ldots$$

On sait que $\sqrt[3]{10} = 2{,}1544 \ldots.$

Racine carrée. L'application des formules (ω) et (ω') à la racine carrée donne lieu à diverses remarques que je laisse de côté dans cet article.

Je me bornerai à démontrer, à l'aide de quelques exemples, la supériorité de (ω') — comme simplicité et rapidité — sur le calcul au moyen du développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}$$

Réduites :

$$\frac{1}{1} ; \ \frac{3^*}{2} ; \ \frac{7}{5} ; \ \frac{17^{**}}{12} ; \ \frac{41}{29} ; \ \frac{99}{70} ; \ \frac{239}{169} ; \ \frac{577^{***}}{408} ; \ \frac{1393}{985} ; \ \frac{3363}{2378} ;$$

$$\frac{8119}{5741} ; \ \frac{19601}{13860} ; \ \frac{47321}{33461} ; \ \frac{114243}{80782} ; \ \frac{275807}{195025} ; \ \frac{665857^{***}}{470832} ; \ldots$$

$$(\omega') \qquad \frac{3}{2} ; \ \frac{17}{12} ; \ \frac{577}{408} ; \ \frac{665857}{470832} ; \ldots$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}$$

Réduites :

$$\frac{1}{1}\,;\quad \frac{2^*}{1}\,;\quad \frac{5}{3}\,;\quad \frac{7^{**}}{4}\,;\quad \frac{19}{11}\,;\quad \frac{26}{15}\,;\quad \frac{71}{41}\,;\quad \frac{97^{***}}{56}\,;\quad \frac{265}{153}\,;\quad \frac{362}{209}\,;\quad \frac{989}{571}\,;$$

$$\frac{1351}{780}\,;\quad \frac{3691}{2131}\,;\quad \frac{5042}{2911}\,;\quad \frac{13775}{7953}\,;\quad \frac{18817^{****}}{10864}\,;\ \ldots$$

$$(\omega') \qquad \frac{2}{1}\,;\quad \frac{7}{4}\,;\quad \frac{97}{56}\,;\quad \frac{18817}{10864}\,;\ \ldots$$

$$\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \text{etc.}}}}$$

Réduites :

$$\frac{3}{1}\,;\quad \frac{10^*}{3}\,;\quad \frac{63}{19}\,;\quad \frac{199^{**}}{60}\,;\quad \frac{1257}{379}\,;\quad \frac{3970}{1197}\,;\quad \frac{25077}{7561}\,;\quad \frac{79201^{***}}{23880}\,;\ \ldots$$

$$(\omega') \qquad \frac{10}{3}\,;\quad \frac{199}{60}\,;\quad \frac{79201}{23880}\,;\ \ldots$$

$$\sqrt{15} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}$$

Réduites :

$$\frac{3}{1}\,;\quad \frac{4}{1}\,;\quad \frac{27}{7}\,;\quad \frac{31^{**}}{8}\,;\quad \frac{213}{55}\,;\quad \frac{244}{63}\,;\quad \frac{1677}{433}\,;\quad \frac{1921^{***}}{496}\,;$$

$$(\omega') \qquad a - \alpha = 3 \qquad \frac{4}{1}\,;\quad \frac{31}{8}\,;\quad \frac{1921}{496}\,;\ \ldots$$

$$a + \alpha = 4 \qquad \frac{31}{8}\,;\quad \frac{1921}{496}\,;\ \ldots$$

Dans ces exemples, (ω') fournit les réduites de rang 2^m. Ce n'est cependant pas toujours le cas.

Lucien Baatard (Genève).