Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1912)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXTRACTION D'UNE RACINE QUELCONQUE D'UN NOMBRE RÉEL A

Autor: Baatard, Lucien

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14281

EXTRACTION D'UNE RACINE QUELCONQUE D'UN NOMBRE RÉEL A[1]

I. — A est une puissance $n^{\text{ième}}$ parfaite.

Posons

$$A = a^n .$$

1. — Considérons une valeur approchée *par excès* de a et représentons-la par $a + \alpha$.

On a :

$$\frac{A}{(a+\alpha)^{n-1}} = \frac{a^n}{a^{n-1} + \frac{n-1}{1}\alpha a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\alpha^2 a^{n-3} + \dots + \alpha^{n-1}}$$

$$= a - (n-1)\alpha + \frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}} ,$$

en posant

$$R = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\alpha^2 a^{n-2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^3 a^{n-3} + \dots$$

$$+ \frac{ln(n-1)(n-2)\dots(n-l)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (l+1)}\alpha^{l+1} a^{n-(l+1)} + \dots + (n-1)\alpha^n .$$

Dans le calcul littéral, la division s'arrête ici; mais dans le calcul numérique la division $\frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}}$ pourra donner encore quelques unités.

Si l'on écrit

$$\frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}} = \varepsilon + \frac{r}{(a+\alpha)^{n-1}} \qquad \left\{ r < (a+\alpha)^{n-1} \right\} ,$$

on a en résumé

$$\frac{A}{(a+\alpha)^{n-1}} = a - (n-1)\alpha + \varepsilon + \frac{r}{(a+\alpha)^{n-1}} \qquad \left\{ r < (a+\alpha)^{n-1} \right\} .$$

[1] Communication présentée à Soleure, le 1er août 1911, à la Section mathématique de la 94e réunion de la Société helvétique des Sciences naturelles.

En additionnant le quotient incomplet $a - (n-1)\alpha + \varepsilon$ avec $(n-1)(a+\alpha)$ et divisant le tout par n, on obtient

$$\frac{a - (n-1)\alpha + \varepsilon + (n-1)(a+\alpha)}{n} = a + \frac{\varepsilon}{n} .$$

Le quotient incomplet de cette division est la racine cherchée a ou, si $\varepsilon > n$, une valeur approchée par excès de cette racine.

Applications.

1. — $\sqrt[5]{1\,889\,568}$

$$a + \alpha = 20 ; \qquad 20^4 = 160000 ; \qquad 1889568 : 160000 = 11 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{11 + 4 \,.\, 20}{5} = 18 \text{ quot. inc.} = \sqrt[5]{1889568}$$

2. — $\sqrt[3]{79507}$

$$a + \alpha = 50 \qquad 79507 : 50^2 = 31 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{31 + 2 \,.\, 50}{3} = 43 \text{ quot. inc.} = \sqrt[3]{79507}$$

En prenant comme valeur approchée 60, au lieu de 50, on obtient

$$79507 : 60^2 = 22 \text{ quot. inc.} ; \qquad \frac{22 + 2 \,.\, 60}{3} = 47 \text{ quot. inc.} ;$$

le calcul donne une valeur *approchée par excès* de la racine.

3. — $\sqrt{917764}$

$$a + \alpha = 1000 ; \qquad \frac{1000 + 917}{2} = 958 \text{ quot, inc.} = \sqrt{917764} .$$

2. — Considérons maintenant une valeur approchée *par défaut* de a et représentons-la par $a - \alpha$.

On a :

$$\frac{A}{(a-\alpha)^{n-1}} = \frac{a^n}{a^{n-1} - \frac{n-1}{1}\alpha a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,,\,2}\alpha^2 a^{n-3} - \ldots \pm a^{n-1}}$$

$$= a + (n-1)\alpha + \frac{R'}{(a-\alpha)^{n-1}} ,$$

en posant

$$R' = \frac{n(n-1)}{1,2}\alpha^2 a^{n-2} - \frac{2n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\alpha^3 a^{n-3} + \dots$$

$$\pm \frac{ln(n-1)(n-2)\dots(n-l)}{1,2,3\dots(l+1)}\alpha^{l+1} a^{n-(l+1)} \mp \dots \pm (n-1)\alpha^n .$$

R' est-il positif?

On peut écrire

$$R' = a^n - [a + (n-1)\alpha](a-\alpha)^{n-1}$$

$$= [(a-\alpha)+\alpha]^n - [(a-\alpha)^n + n\alpha(a-\alpha)^{n-1}] .$$

Or

$$[(a-\alpha)+\alpha]^n = (a-\alpha)^n + \frac{n}{1}\alpha(a-\alpha)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1,2}\alpha^2(a-\alpha)^{n-2}$$

$$+ \dots + \alpha^n .$$

Donc

$$R' = \frac{n(n-1)}{1,2}\alpha^2(a-\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1,2,3}\alpha^3(a-\alpha)^{n-3} + \dots + \alpha^n ;$$

R' *est toujours positif.*

Comme on peut avoir $R' > (a-\alpha)^{n-1}$, posons

$$\frac{R'}{(a-\alpha)^{n-1}} = \varepsilon' + \frac{r'}{(a-\alpha)^{n-1}} \qquad \left\{ r' < (a-\alpha)^{n-1} \right\} .$$

En opérant comme avec la valeur approchée par excès, on obtient

$$\frac{a + (n-1)\alpha + \varepsilon' + (n-1)(a-\alpha)}{n} = a + \frac{\varepsilon'}{n}$$

et l'on aboutit à la même conclusion.

Applications.

1. — $\sqrt[6]{191\ 102\ 976}$

$a - \alpha = 20$; $\quad$ $191\ 102\ 976 : 20^5 = 59$ quot. inc.

$$\frac{59 + 5.20}{6} = 26 \text{ quot. inc.}$$

$26^5 = 11\ 881\ 376$; $\quad$ 26 est plus grand que la racine cherchée.

Répétant l'opération avec 26, on obtient :

$$191\ 102\ 976 : 11\ 881\ 376 = 16 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{16 + 5 \, . \, 26}{6} = 24 \text{ quot. inc.} = \sqrt[6]{191\ 102\ 976} \, .$$

2. — $\sqrt[4]{131\ 079\ 601}$

$$a - \alpha = 100 \ ; \qquad 131\ 079\ 601 : 100^3 = 131 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{131 + 3 \, . \, 100}{4} = 107 \text{ quot. inc.} = \sqrt[4]{131\ 079\ 601} \, .$$

3. — $\sqrt{4\ 613\ 904}$

$$a - \alpha = 2000 \ ; \qquad 4\ 613\ 904 : 2000 = 2306 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{2306 + 2000}{2} = 2153 \, .$$

Il faut répéter l'opération :

$$4\ 613\ 904 : 2153 = 2143 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{2143 + 2153}{2} = 2148 = \sqrt{4\ 613\ 904} \, .$$

Formule (ω). Représentons par $a \pm \alpha$ une valeur approchée par excès ou par défaut de $\sqrt[n]{A}$ et par p le quotient incomplet de la division de A par $(a \pm \alpha)^{n-1}$.

Il résulte de ce qui précède que le nombre v_1, donné par la formule (ω)

$$v_1 = \frac{p + (n-1)(a \pm \alpha)}{n} \text{ quot. inc.} \, ,$$

est ou $\sqrt[n]{A}$ ou une valeur approchée par excès de $\sqrt[n]{A}$.

Si l'on n'obtient pas tout de suite $\sqrt[n]{A}$, on opère sur v_1 comme sur $a \pm \alpha$ et ainsi de suite.

II. — $\sqrt[n]{A}$ est un nombre irrationnel.

Si l'on représente par x et $x + 1$ les deux nombres consécutifs entre les $n^{\text{ièmes}}$ puissances desquels se trouve A, la formule (ω) donne x ou une valeur approchée par excès de x.

Pour s'en rendre compte, il suffit de poser

$$A = x^n + h$$

et de remplacer a par x dans les calculs précédents; h s'ajoute à R ou R′ et la conclusion pour a subsiste pour x.

Ex. : $\sqrt[3]{72\,000}$

$$a - \alpha = 40 \ ; \qquad 72\,000 : 40^2 = 45 \ ; \qquad \frac{45 + 2 \,.\, 40}{3} = 41 \text{ quot. inc.}$$

$$41^3 = 68\,921 < 72\,000$$

$$42^3 = 74\,088 > 72\,000 \ .$$

Pour obtenir $\sqrt[n]{A}$ à moins de $\frac{1}{z}$ près, par défaut, on a la relation

$$\sqrt[n]{A} = \frac{1}{z}\sqrt[n]{z^n \,.\, A} \ ;$$

on calcule, comme ci-dessus, $\sqrt[n]{z^n \,.\, A}$ à moins d'une unité près, par défaut, et on divise le résultat par z.

Ex. : Soit à calculer $\sqrt[3]{10}$ à moins de $\frac{1}{100}$ près.

$$\sqrt[3]{10} = \frac{1}{100}\sqrt[3]{10\,000\,000}$$

$$a - \alpha = 200 \ ; \quad 10\,000\,000 : 200^2 = 250 \ ; \quad \frac{250 + 2 \,.\, 200}{3} = 216 \text{ quot. inc.}$$

$$216^2 = 46\,656$$

$$10\,000\,000 : 46\,656 = 214 \text{ quot. inc.} \ ; \quad \frac{214 + 2 \,.\, 216}{3} = 215 \text{ quot. inc.}$$

$$2{,}15 = \sqrt[3]{10} \ , \text{ à moins de } \frac{1}{100} \text{ près, par défaut.}$$

Utilisation des quotients complets : *formule* (ω'). En prenant les quotients complets p' et y_1 des divisions qui donnent p et v_1, on obtient un nombre fractionnaire qui exprime la valeur de $\sqrt[n]{A}$ avec une erreur par excès ; l'application du même calcul à y_1 donnera un nouveau nombre fractionnaire $y_2 > \sqrt[n]{A}$ mais $< y_1$; on obtiendra de même $y_3 > \sqrt[n]{A}$ mais $< y_2$, et ainsi de suite.

Ce calcul se représente par la formule (ω')

$$y_1 = \frac{p' + (n-1)(a \pm \alpha)}{n} .$$

L'erreur diminue assez fortement quand on passe de l'un de ces résultats au suivant.

A titre d'exemple, reprenons $\sqrt[3]{10}$.

$$a - \alpha = 2 \; ; \qquad \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \; ; \qquad \frac{\frac{5}{2} + 2 \, . \, 2}{3} = \frac{13}{6} = 2{,}1666 \ldots$$

$$10 : \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{360}{169} \; ; \qquad \frac{\frac{360}{169} + \frac{2 \, . \, 13}{6}}{3} = \frac{3277}{1521} = 2{,}1545 \ldots$$

On sait que $\sqrt[3]{10} = 2{,}1544 \ldots.$

Racine carrée. L'application des formules (ω) et (ω') à la racine carrée donne lieu à diverses remarques que je laisse de côté dans cet article.

Je me bornerai à démontrer, à l'aide de quelques exemples, la supériorité de (ω') — comme simplicité et rapidité — sur le calcul au moyen du développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}$$

Réduites :

$$\frac{1}{1} \; ; \; \frac{3^*}{2} \; ; \; \frac{7}{5} \; ; \; \frac{17^{**}}{12} \; ; \; \frac{41}{29} \; ; \; \frac{99}{70} \; ; \; \frac{239}{169} \; ; \; \frac{577^{***}}{408} \; ; \; \frac{1393}{985} \; ; \; \frac{3363}{2378} \; ;$$

$$\frac{8119}{5741} \; ; \; \frac{19601}{13860} \; ; \; \frac{47321}{33461} \; ; \; \frac{114243}{80782} \; ; \; \frac{275807}{195025} \; ; \; \frac{665857^{***}}{470832} \; ; \ldots$$

(ω') $$\frac{3}{2} \; ; \; \frac{17}{12} \; ; \; \frac{577}{408} \; ; \; \frac{665857}{470832} \; ; \ldots$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}$$

Réduites :

$$\frac{1}{1};\ \frac{2^*}{1};\ \frac{5}{3};\ \frac{7^{**}}{4};\ \frac{19}{11};\ \frac{26}{15};\ \frac{71}{41};\ \frac{97^{***}}{56};\ \frac{265}{153};\ \frac{362}{209};\ \frac{989}{571};$$

$$\frac{1351}{780};\ \frac{3691}{2131};\ \frac{5042}{2911};\ \frac{13775}{7953};\ \frac{18817^{****}}{10864};\ \ldots$$

$$(\omega') \qquad \frac{2}{1};\ \frac{7}{4};\ \frac{97}{56};\ \frac{18817}{10864};\ \ldots$$

$$\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \text{etc.}}}}$$

Réduites :

$$\frac{3}{1};\ \frac{10^*}{3};\ \frac{63}{19};\ \frac{199^{**}}{60};\ \frac{1257}{379};\ \frac{3970}{1197};\ \frac{25077}{7561};\ \frac{79201^{***}}{23880};\ \ldots$$

$$(\omega') \qquad \frac{10}{3};\ \frac{199}{60};\ \frac{79201}{23880};\ \ldots$$

$$\sqrt{15} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}$$

Réduites :

$$\frac{3}{1};\ \frac{4}{1};\ \frac{27}{7};\ \frac{31^{**}}{8};\ \frac{213}{55};\ \frac{244}{63};\ \frac{1677}{433};\ \frac{1921^{***}}{496};$$

$$(\omega') \qquad a - \alpha = 3 \qquad \frac{4}{1};\ \frac{31}{8};\ \frac{1921}{496};\ \ldots$$

$$a + \alpha = 4 \qquad \frac{31}{8};\ \frac{1921}{496};\ \ldots$$

Dans ces exemples, (ω') fournit les réduites de rang 2^m. Ce n'est cependant pas toujours le cas.

Lucien BAATARD (Genève).