LES SOMMES DE pièmes PUISSANGES DISTINCTES DE NOMBRES POLYGONAUX DE n COTÉS ÉGALES A UNE pièmes PUISSANCE D'UN NOMBRE POLYGONAL DE n COTÉS

LES SOMMES DE $p^{\text{ièmes}}$ PUISSANCES DISTINCTES DE NOMBRES POLYGONAUX DE n COTÉS ÉGALES A UNE $p^{\text{ième}}$ PUISSANCE D'UN NOMBRE POLYGONAL DE n COTÉS

Soit n_x le $x^{\text{ième}}$ nombre polygonal de n côtés, en sorte que

$$n_x \equiv \frac{1}{2} x [(n - 2) x + 4 - n]$$

et par suite $2_x \equiv x$; si $S^{(n)}_{p,x}$ représente la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres polygonaux de n côtés et $S_{p,x}$ la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres entiers, on trouve[1]

$$S^{(n)}_{p,x} \mathrel{\underline{\Omega}} \frac{1}{2^p} S_{p,x} [(n - 2) S_{0,p} + (4 - n)]^p ,$$

égalité dans laquelle $S^{(n)}_{p,x}$ est du $(2p + 1)^{\text{ième}}$ degré en x. Nous passons du signe $\underline{\Omega}$ au signe $=$, après développement, en convenant d'ajouter les exposants de $S_{0,x}$ à son premier indice 0 et en admettant que $S_{\beta,x} \times S_{\gamma,x} = S_{\beta+\gamma,x}$.

Supposons maintenant qu'une somme de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes des nombres polygonaux de n côtés puisse être une $p^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre polygonal de n côtés, et considérons l'identité

$$n^p_{x-\alpha_1} + n^p_{x-\alpha_2} + \ldots + n^p_{x-\alpha_m} + n^p_x = n^p_{x+\alpha} \tag{1}$$

---

[1] *Les sommes de* p$^{\text{ièmes}}$ *puissances distinctes égales à une* p$^{\text{ième}}$ *puissance.* E. BARBETTE, page 148. Editeur: Gauthier-Villars, Paris; prix: Fr. 12,50.

dans laquelle les $p^{\text{ièmes}}$ puissances sont écrites par ordre de grandeur, en sorte que

$$x - 1 \geqq \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m \geqq 1 \, .$$

Ajoutons aux deux membres de l'égalité (1) les lacunes laissées par les parties du premier membre dans la suite des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres polygonaux de n côtés n_1^p, n_2^p, ..., n_x^p; nous obtenons

$$\begin{aligned} S_{p,x}^{(n)} = n_{x+\alpha}^p &+ n_{x-1}^p + n_{x-2}^p + \dots + n_{x-\alpha_m+1}^p \\ &+ n_{x-\alpha_m-1}^p + n_{x-\alpha_m-2}^p + \dots + n_{x-\alpha_{m-1}+1}^p \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ n_{x-\alpha_1-1}^p + n_{x-\alpha_1-2}^p + \dots + n_1^p \, , \end{aligned}$$

égalité qui entraîne la condition $S_{p,x}^{(n)} \geqq n_{x+\alpha}^p$.

Par suite, si l'inégalité $S_{p,x}^{(n)} < n_{x+1}^p$ n'est satisfaite que pour $x \leqq \mu$, il n'existera aucune somme de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes de nombres polygonaux de n côtés, dont la plus grande est n_2^p, ou n_3^p, ou n_4^p, ..., ou n_μ^p, qui soit égale à une $p^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre polygonal de n côtés.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'égalité (1) existe se déterminent, en ce qui concerne les nombres polygonaux de n côtés pour $n > 2$, ainsi que nous l'avons fait dans l'hypothèse $n = 2$ dans notre ouvrage sur les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances.

Des relations

$$S_{1,x}^{(3)} = \frac{1}{6} x(x+1)(x+2)$$

$$S_{1,x}^{(4)} = \frac{1}{6} x(x+1)(2x+1)$$

$$S_{1,x}^{(5)} = \frac{1}{2} x^2(x+1)$$

$$S_{1,x}^{(6)} = \frac{1}{6} x(x+1)(4x-1)$$

nous déduisons, ainsi que nous l'avons fait pour les nombres carrés (pages 77 et 105), que pour qu'une somme de nombres polygonaux de n côtés soit un nombre polygonal de n côtés, il faut et il suffit que l'on ait trois conditions distinctes; il s'ensuit que l'*égalité*

$$n_{x-\alpha} + n_x = n_{x+\alpha} \tag{2}$$

peut exister: en effet, le nombre x étant donné, deux des trois conditions précitées permettront de déterminer les couples de valeurs correspondantes de α_1 et α; le nombre de solutions sera limité, α devant satisfaire à l'inégalité $S^{(n)}_{1,x} \geqq n_{x+\alpha}$. Et si l'un de ces couples transforme la troisième condition en identité, il existera une relation de la forme (2). Nous avons montré, dans notre étude sur les $p^{\text{ièmes}}$ puissances (page 153) que de telles sommes existent.

Observation. — Quoique les problèmes qui vont suivre s'appliquent aux $p^{\text{ièmes}}$ puissances pour toute valeur de p, nous n'examinerons dans nos exemples que l'hypothèse $p = 1$.

Problème I. — *Quelles sont toutes les sommes de* p$^{\text{ièmes}}$ *puissances distinctes de nombres polygonaux de* n *côtés, dont la plus grande est* n^p_x, *égales à une* p$^{\text{ième}}$ *puissance d'un nombre polygonal de* n *côtés?*

Solution. — Soit

$$n^p_{x+h} \leqq S^{(n)}_{p,x} < n^p_{x+h+1} \,.$$

L'égalité $S^{(n)}_{p,x} = n^p_{x+h}$, si elle existe, fournit une première solution

$$n^p_1 + n^p_2 + n^p_3 + \dots + n^p_x = n^p_{x+h} \,.$$

Posons

$$S^{(n)}_{p,x} = n^p_{x+\alpha} + [S^{(n)}_{p,x} - n^p_{x+\alpha}] \,, \tag{3}$$

α variant de 1 à h, puis transformons le crochet par différences successives en une somme de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes de nombres polygonaux de n côtés, si possible, dont la plus grande ne dépasse pas n^p_{x-1}, mais peut être moindre: en supprimant de part et d'autre de l'égalité (3) ainsi transformée, les parties communes, nous obtiendrons autant de solutions qu'il existera de sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes égales à ce crochet; il n'y en aura pas d'autre.

Sommes de nombres triangulaires distincts, dont le plus grand est 3_6 *ou* 21, *égales à un nombre triangulaire :*

$$S_{1,6}^{(3)} = 56 .$$

1° $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56 = 28 + 15 + 10 + 3$

d'où $1 + 6 + 21 = 28$ ou $3_1 + 3_3 + 3_6 = 3_7$;

2° $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56 = 36 + 10 + 6 + 3 + 1$

d'où $15 + 21 = 36$ ou $3_5 + 3_6 = 3_8$;

3° $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56 = 45 + 10 + 1$

d'où $3 + 6 + 15 + 21 = 45$ ou $3_2 + 3_3 + 3_5 + 3_6 = 3_9$;

4° $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56 = 55 + 1$

d'où $3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 55$ ou $3_2 + 3_3 + 3_4 + 3_5 + 3_6 = 3_{10}$.

Sommes de nombres carrés distincts, dont le plus grand est 4_8 *ou* 64, *égales à un nombre carré :*

$$S_{1,8}^{(4)} = 204 .$$

1° $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$
$= 204 = 81 + 49 + 36 + 25 + 9 + 4$

d'où $1 + 16 + 64 = 81$ ou $4_1 + 4_2 + 4_8 = 4_9$;

2° $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$
$= 204 = 100 + 49 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1$

d'où $36 + 64 = 100$ ou $4_6 + 4_8 = 4_{10}$;

3° $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$
$= 204 = 121 + 49 + 25 + 9$

d'où $1 + 4 + 16 + 36 + 64 = 121$ ou $4_1 + 4_2 + 4_4 + 4_6 + 4_8 = 4_{11}$;

4° $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$
$= 204 = 169 + 25 + 9 + 1$

d'où $4 + 16 + 36 + 49 + 64 = 169$ ou $4_2 + 4_4 + 4_6 + 4_7 + 4_8 = 4_{13}$.

Sommes de nombres pentagonaux distincts, dont le plus grand est 5_9 *ou* 117, *égales à un nombre pentagonal :*

$$S_{1,9}^{(5)} = 405 .$$

1° $1+5+12+22+35+51+70+92+117$
$$=405=145+92+70+51+35+12$$

d'où $1+5+22+117=145$ ou $5_1+5_2+5_4+5_9=5_{10}$;

2° $1+5+12+22+35+51+70+92+117$
$$=405=210+92+51+35+12+5$$

d'où $1+22+70+117=210$ ou $5_1+5_4+5_7+5_9=5_{12}$;

3° $1+5+12+22+35+51+70+92+117$
$$=405=210+70+51+35+22+12+5$$

d'où $1+92+117=210$ ou $5_1+5_8+5_9=5_{12}$;

4° $1+5+12+22+35+51+70+92+117$
$$=405=287+70+35+12+1$$

d'où $5+12+51+92+117=287$ ou $5_2+5_4+5_6+5_8+5_9=5_{14}$;

5° $1+5+12+22+35+51+70+92+117$
$$=405=330+70+5$$

d'où $1+12+22+35+51+92+117=330$ ou $5_1+5_3+5_4+5_5+5_6+5_8+5_9=5_{15}$;

6° $1+5+12+22+35+51+70+92+117$
$$=405=330+35+22+12+5+1$$

d'où $51+70+92+117=330$ ou $5_6+5_7+5_8+5_9=5_{15}$.

Sommes de nombres hexagonaux distincts, dont le plus grand est 6_8 *ou* 120, *égales à un nombre hexagonal :*

$$S^{(6)}_{1,8}=372 \ .$$

Le problème n'admet que la solution donnée par l'identité

$$1+6+15+28+45+66+91+120=372=231+91+28+15+6+1$$

d'où $45+66+120=231$ ou $6_5+6_6+6_8=6_{11}$.

Problème II. — *Quelles sont toutes les sommes de* $\mathrm{p}^{\text{ièmes}}$ *puissances distinctes de nombres polygonaux de* n *côtés, égales à une* $\mathrm{p}^{\text{ième}}$ *puissance donnée* $\mathrm{n}_\mathrm{q}^\mathrm{p}$ *d'un nombre polygonal de* n *côtés ?*

Solution. — Soit

$$S^{(n)}_{p,x-1} < n^p_q \leq S^{(n)}_{p,x} .$$

Calculons successivement

$$S^{(n)}_{p,x} \; ; \quad S^{(n)}_{p,x+1} \; ; \quad S^{(n)}_{p,x+2} \; ; \; \dots \; ; \; S^{(n)}_{p,q-1} \; ;$$

puis transformons chacun des résultats obtenus en sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes de nombres polygonaux de n côtés dont la plus grande est n^p_q et dont toutes les autres sont moindres respectivement que

$$n^p_x \; ; \quad n^p_{x+1} \; ; \quad n^p_{x+2} \; ; \; \dots \; ; \; n^p_{q-1} \; .$$

En supprimant des deux membres des égalités ainsi transformées, les termes communs, nous formerons toutes les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes égales à la $p^{\text{ième}}$ puissance donnée n^p_q.

Sommes de nombres triangulaires distincts égales au nombre triangulaire 3_{10} *ou* 55 :

$$35 < 55 < 56 \qquad \text{ou} \qquad S^{(3)}_{1,5} < 3_{10} < S^{(3)}_{1,6} \; ;$$

$$S^{(3)}_{1,6} = 56 \; ; \quad S^{(3)}_{1,7} = 84 \; ; \quad S^{(3)}_{1,8} = 120 \; ; \quad S^{(3)}_{1,9} = 165 \; .$$

1° $S^{(3)}_{1,6}$ ou $1+3+6+10+15+21$
$= 56 = 55 + 1$

d'où $3+6+10+15+21 = 55$ ou $3_2+3_3+3_4+3_5+3_6 = 3_{10}$;

2° $S^{(3)}_{1,7}$ ou $1+3+6+10+15+21+28$
$= 84 = 55+15+10+3+1$

d'où $6+21+28 = 55$ ou $3_3+3_6+3_7 = 3_{10}$;

3° $S^{(3)}_{1,8}$ ou $1+3+6+10+15+21+28+36$
$= 120 = 55+28+21+15+1$

d'où $3+6+10+36 = 55$ ou $3_2+3_3+3_4+3_8 = 3_{10}$;

$S^{(3)}_{1,8}$ ou $1+3+6+10+15+21+28+36$
$= 120 = 55+28+21+10+6$

d'où $1+3+15+36 = 55$ ou $3_1+3_2+3_5+3_8 = 3_{10}$;

4° $S_{1,9}^{(3)}$ ou $1+3+6+10+15+21+28+36+45$

$$= 165 = 55+36+28+21+15+10$$

d'où $1+3+6+45 = 55$ ou $3_1+3_2+3_3+3_9 = 3_{10}$;

$S_{1,9}^{(3)}$ ou $1+3+6+10+15+21+28+36+45$

$$= 165 = 55+36+28+21+15+6+3 +1$$

d'où $10+45 = 55$ ou $3_4+3_9 = 3_{10}$.

Sommes de nombres carrés distincts égales au nombre carré 4_{11} *ou* 121 :

$$91 < 121 < 140 \quad \text{ou} \quad S_{1,6}^{(4)} < 4_{11} < S_{1,7}^{(4)} ;$$

$$S_{1,7}^{(4)} = 140 ; \quad S_{1,8}^{(4)} = 204 ; \quad S_{1,9}^{(4)} = 285 ; \quad S_{1,10}^{(4)} = 385 .$$

1° $S_{1,7}^{(4)}$ ne fournit aucune solution ;

2° $S_{1,8}^{(4)}$ ou $1+4+9+16+25+36+49+64$

$$= 204 = 121+49+25+9$$

d'où $1+4+16+36+64 = 121$ ou $4_1+4_2+4_4+4_6+4_8 = 4_{11}$;

3° $S_{1,9}^{(4)}$ ou $1+4+9+16+25+36+49+64+81$

$$= 285 = 121+64+49+25+16+9 +1$$

d'où $4+36+81 = 121$ ou $4_2+4_6+4_9 = 4_{11}$;

4° $S_{1,10}^{(4)}$ ou $1+4+9+16+25+36+49+64+81+100$

$$= 385 = 121+81+64+49+36+25 +9$$

d'où $1+4+16+100 = 121$ ou $4_1+4_2+4_4+4_{10} = 4_{11}$.

Sommes de nombres pentagonaux distincts égales au nombre pentagonal 5_8 *ou* 92 :

$$75 < 92 < 126 \quad \text{ou} \quad S_{1,5}^{(5)} < 5_8 < S_{1,6}^{(5)} ;$$

$$S_{1,6}^{(5)} = 126 ; \quad S_{1,7}^{(5)} = 196 .$$

1° $S_{1,6}^{(5)}$ ou $1+5+12+22+35+51 = 126 = 92+22+12$

d'où $1+5+35+51 = 92$ ou $5_1+5_2+5_5+5_6 = 5_8$;

2° $S_{1,7}^{(5)}$ ou $1+5+12+22+35+51+70$

$$= 196 = 92+51+35+12+5+1$$

d'où $22+70 = 92$ ou $5_4+5_7 = 5_8$.

Sommes de nombres hexagonaux distincts égales au nombre hexagonal 6_{13} *ou* 325 :

$$252 < 325 < 372 \quad \text{ou} \quad S^{(6)}_{1,7} < 6_{13} < S^{(6)}_{1,8} \;;$$

$$S^{(6)}_{1,8} = 372 \;;\quad S^{(6)}_{1,9} = 525 \;;\quad S^{(6)}_{1,10} = 715 \;;\quad S^{(6)}_{1,11} = 946 \;;\quad S^{(6)}_{1,12} = 1222 \,.$$

1° $S^{(6)}_{1,8}$ ne fournit pas de solution ;

2° $S^{(6)}_{1,9}$ ou $1+6+15+28+45+66+91+120+153$
$= 525 = 325+120+45+28+6+1$

d'où $15+66+91+153 = 325$ ou $6_3+6_6+6_7+6_9 = 6_{13}$;

$S^{(6)}_{1,9}$ ou $1+6+15+28+45+66+91+120+153$
$= 525 = 325+91+66+28+15$

d'où $1+6+45+120+153 = 325$ ou $6_1+6_2+6_5+6_8+6_9 = 6_{13}$;

3° $S^{(6)}_{1,10}$ ou $1+6+15+28+45+66+91+120+153+190$
$= 715 = 325+153+120+66+45+6$

d'où $1+15+28+91+190 = 325$ ou $6_1+6_3+6_4+6_7+6_{10} = 6_{13}$;

$S^{(6)}_{1,10}$ ou $1+6+15+28+45+66+91+120+153+190$
$= 715 = 325+153+91+66+45+28$
$+6+1$

d'où $15+120+190 = 325$ ou $6_3+6_8+6_{10} = 6_{13}$;

4° $S^{(6)}_{1,11}$ ou $1+6+15+28+45+66+91+120+153+190+231$
$= 946 = 325+190+153+120+91$
$+66+1$

d'où $6+15+28+45+231 = 325$ ou $6_2+6_3+6_4+6_5+6_{11} = 6_{13}$;

$S^{(6)}_{1,11}$ ou $1+6+15+28+45+66+91+120+153+190+231$
$= 946 = 325+190+153+120+91$
$+45+15+6+1$

d'où $28+66+231 = 325$ ou $6_4+6_6+6_{11} = 6_{13}$;

5° $S^{(6)}_{1,12}$ ou $1+6+15+28+45+66+91+120+153+190+231+276$
$= 1222 = 325+231+190+153+120$
$+91+66+45+1$

d'où $6+15+28+276 = 325$ ou $6_2+6_3+6_4+6_{12} = 6_{13}$.

Problème III. — *Quelles sont les sommes de* p$^{\text{ièmes}}$ *puissances consécutives de nombres polygonaux de* n *côtés égales à une* p$^{\text{ième}}$ *puissance d'un nombre polygonal de* n *côtés ?*

Solution. — Considérons un damier d'un nombre illimité de cases et écrivons en diagonale, de haut en bas et de gauche à droite, la suite

$$n_1^p\,,\quad n_2^p\,,\quad n_3^p\,,\quad \dots\,,\quad n_x^p\,,\quad \dots$$

Ajoutons au nombre n_x^p de cette diagonale, le nombre n_{x-1}^p qui le précède; au résultat $n_x^p + n_{x-1}^p$, ajoutons le nombre n_{x-2}^p qui précède n_{x-1}^p; au résultat $n_x^p + n_{x-1}^p + n_{x-2}^p$, ajoutons le nombre n_{x-3}^p qui précède n_{x-2}^p; et ainsi de suite.

Ecrivons les sommes obtenues successivement dans les cases qui suivent la verticale passant par n_x^p, de bas en haut : dans la $x^{\text{ième}}$ case, c'est-à-dire dans la case qui appartient à la première bande horizontale du damier, se trouvera le nombre représenté par la somme

$$n_x^p + n_{x-1}^p + n_{x-2}^p + \dots + n_1^p \equiv \mathrm{S}_{p,x}^{(n)}\ .$$

Tout nombre N de ce tableau appartient à l'intersection d'une bande horizontale qui, considérée de gauche à droite, commence par n_{y+1}^p et d'une bande verticale qui, considérée de bas en haut, commence par n_x^p; à ce nombre correspond l'égalité

$$n_{y+1}^p + n_{y+2}^p + \dots + n_x^p = \mathrm{N}\ .$$

Lorsque N sera une $p^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre polygonal de n côtés, l'égalité qui précède donnera une solution du problème.

Observons, en passant, que tout nombre N du damier est égal à la différence $\mathrm{S}_{p,x}^{(n)} - \mathrm{S}_{p,y}^{(n)}$.

Sommes de nombres triangulaires consécutifs égales à un nombre triangulaire :

$3_1 + 3_2 + 3_3 = 3_4$;
$3_5 + 3_6 = 3_8$;
$3_2 + 3_3 + 3_4 + 3_5 + 3_6 = 3_{10}$;
$3_1 + 3_2 + 3_3 + 3_4 + 3_5 + 3_6 + 3_7 + 3_8 = 3_{15}$;
$3_8 + 3_9 + 3_{10} = 3_{16}$;
$3_4 + 3_5 + 3_6 + \dots + 3_{10} = 3_{20}$;
$3_4 + 3_5 + 3_6 + \dots + 3_{11} = 3_{23}$;
$3_5 + 3_6 + 3_7 + \dots + 3_{13} = 3_{29}$;
$3_3 + 3_4 + 3_5 + \dots + 3_{19} = 3_{51}$;
$3_{13} + 3_{14} + 3_{15} + \dots + 3_{20} = 3_{48}$;
$3_1 + 3_2 + 3_3 + \dots + 3_{20} = 3_{55}$;
$3_{12} + 3_{13} + 3_{14} + \dots + 3_{21} = 3_{54}$;
$3_2 + 3_3 + 3_4 + \dots + 3_{21} = 3_{59}$;
$3_{11} + 3_{12} + 3_{13} + \dots + 3_{23} = 3_{64}$;
$3_{14} + 3_{15} + 3_{16} + \dots + 3_{24} = 3_{65}$;
$3_8 + 3_9 + 3_{10} + \dots + 3_{27} = 3_{84}$;
$3_{21} + 3_{22} + 3_{23} + \dots + 3_{31} = 3_{88}$;
$3_4 + 3_5 + 3_6 + \dots + 3_{30} = 3_{99}$;
. . . .

Sommes de nombres carrés consécutifs égales à un nombre carré :

$4_3 + 4_4 = 4_5$;
$4_{20} + 4_{21} = 4_{29}$;
$4_1 + 4_2 + 4_3 + \dots + 4_{24} = 4_{70}$;
$4_{18} + 4_{19} + 4_{20} + \dots + 4_{28} = 4_{77}$;
$4_7 + 4_8 + 4_9 + \dots + 4_{29} = 4_{92}$;
$4_9 + 4_{10} + 4_{11} + \dots + 4_{32} = 4_{106}$;
$4_{17} + 4_{18} + 4_{19} + \dots + 4_{39} = 4_{138}$;
$4_7 + 4_8 + 4_9 + \dots + 4_{39} = 4_{143}$;
$4_{20} + 4_{21} + 4_{22} + \dots + 4_{43} = 4_{158}$;
$4_{38} + 4_{39} + 4_{40} + \dots + 4_{48} = 4_{143}$;
. . . .

Sommes de nombres pentagonaux consécutifs égales à un nombre pentagonal :

$$5_2 + 5_3 + 5_4 + 5_5 + 5_6 + 5_7 + 5_8 = 5_{14} ;$$
$$5_6 + 5_7 + 5_8 + 5_9 = 5_{15} ;$$
$$5_4 + 5_5 + 5_6 + \ldots\ldots + 5_{10} = 5_{19} ;$$
$$5_6 + 5_7 + 5_8 + \ldots\ldots + 5_{11} = 5_{21} ;$$
$$5_8 + 5_9 + 5_{10} + \ldots\ldots + 5_{18} = 5_{44} ;$$
$$5_3 + 5_4 + 5_5 + \ldots\ldots + 5_{21} = 5_{47} ;$$
$$5_8 + 5_9 + 5_{10} + \ldots\ldots + 5_{22} = 5_{60} ;$$
$$5_{25} + 5_{26} = 5_{36} ;$$
$$5_{12} + 5_{13} + 5_{14} + \ldots\ldots + 5_{26} = 5_{75} ;$$
$$5_{10} + 5_{11} + 5_{12} + \ldots\ldots + 5_{27} = 5_{81} ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sommes de nombres hexagonaux consécutifs égales à un nombre hexagonal :

$$6_1 + 6_2 + 6_3 + \ldots\ldots + 6_{11} = 6_{22} ;$$
$$6_3 + 6_4 + 6_5 + \ldots\ldots + 6_{13} = 6_{28} ;$$
$$6_{13} + 6_{14} = 6_{19} ;$$
$$6_{15} + 6_{16} + 6_{17} + \ldots\ldots + 6_{24} = 6_{60} ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Observation. — En ce qui concerne les nombres triangulaires, la forme

$$S^{(3)}_{2,x} = \frac{1}{60} x(x+1)(x+2)(3x^2+6x+1)$$

fait prévoir qu'une somme de carrés de deux nombres triangulaires ne peut être le carré d'un triangulaire [1]; et puisque, d'après le théorème de Fermat, une somme de deux $p^{\text{ièmes}}$ puissances ne peut être une $p^{\text{ième}}$ puissance lorsque p est supérieur à 2, il en résulterait le théorème suivant :

Une somme de deux p$^{\text{ièmes}}$ *puissances de nombres triangulaires ne peut être une* p$^{\text{ième}}$ *puissance d'un nombre triangulaire lorsque* p *est supérieur à l'unité.*

---

[1] A consulter : *Le dernier théorème de Fermat* par E. BARBETTE, (Editeur : Gauthier-Villars, Paris ; prix : Fr. 1,50.)

Une somme de deux carrés de nombres triangulaires peut cependant être un carré, mais non le carré d'un triangulaire :

$$21^2 + 28^2 = 35^2 \text{ ou } 3_6^2 + 3_7^2 = 35^2 ; \qquad 15^2 + 36^2 = 39^2 \text{ ou } 3_5^2 + 3_8^2 = 39^2 ;$$
$$28^2 + 45^2 = 53^2 \text{ ou } 3_7^2 + 3_9^2 = 53^2 ; \qquad 36^2 + 105^2 = 111^2 \text{ ou } 3_8^2 + 3_{14}^2 = 111^2 ; \ldots$$

En d'autres termes, l'équation

$$\left[\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_1+1)}{2}\right]^p + \left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^p = \left[\frac{(x+\alpha)(x+\alpha+1)}{2}\right]^p$$

est impossible en nombres entiers lorsque p est plus grand que 1.

La forme

$$S^{(3)}_{p,x} = x(x+1)(x+2)Q_x$$

dans laquelle, lorsque p est plus grand que 1, Q_x représente un polynôme entier du $(2p-2)^{\text{ième}}$ degré en x, conduit directement à la même conclusion.

La relation

$$S^{(4)}_{2,x} = \frac{1}{30}x(x+1)(2x+1)(3x^2+3x-1) ,$$

fait aussi prévoir qu'*une somme de carrés de deux nombres carrés ne peut être un carré de carré.* Mais des formules

$$S^{(5)}_{2,x} = \frac{1}{60}x(x+1)(27x^3+18x^2-13x-2)$$

et

$$S^{(6)}_{2,x} = \frac{1}{30}x(x+1)(24x^3+6x^2-16x+1) ,$$

nous ne pouvons conclure qu'une somme de deux carrés de nombres pentagonaux ou hexagonaux ne peut être respectivement le carré d'un nombre pentagonal ou hexagonal; il est bon d'observer cependant que nous n'affirmons pas pour cela qu'une telle égalité existe.

E. Barbette (Liège).