

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1912)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE CALCUL FONCTIONNEL
Autor: Hadamard, Jacques
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-14279>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LE CALCUL FONCTIONNEL¹

Par M. Jacques HADAMARD.

Professeur au Collège de France.

L'invention du Calcul infinitésimal n'a pas seulement constitué un perfectionnement des Mathématiques : elle a marqué un changement radical dans leur orientation.

Pour la Science grecque, tout problème se ramenait à la recherche d'un ou plusieurs nombres, déterminés d'une manière complète, quoique implicite, par les données de la question. Manifeste en ce qui concerne les problèmes d'Arithmétique, cela n'était pas moins certain dans le domaine géométrique, puisque les figures considérées par les Anciens (points, droites, plans, cercles, etc.) dépendaient chacune d'un nombre fini et même peu élevé de paramètres.

Etudier les relations entre certains nombres, laissés invariables dans tout le cours du raisonnement, ainsi que la manière d'utiliser ces relations pour calculer quelques-uns d'entre-eux, les autres étant supposés donnés : voilà ce que se proposèrent jusqu'au XVII^{me} siècle aussi bien « l'Algèbre des Modernes » — pour employer le langage de Descartes — que « l'Analyse des Anciens ».

L'exemple même de ceux qui furent dans l'antiquité, les précurseurs du Calcul infinitésimal, Eudoxe, Archimède, ne réagit pas, à cet égard, sur leurs successeurs directs.

Le cadre de la Géométrie antique ne fut vraiment dépassé et une arme nouvelle ne fut donnée à la Science que lorsque,

¹ Nous sommes heureux de pouvoir offrir à nos lecteurs cette intéressante Etude de M. J. HADAMARD sur le développement du Calcul fonctionnel. Elle est extraite du beau volume *Hommage à Louis Olivier* que la Revue générale des Sciences a consacré à la mémoire de son regretté fondateur et directeur. Nous la reproduisons avec l'autorisation de l'auteur et de la *Revue générale des Sciences*.

s'inspirant de cet exemple, les Cavalieri, les Fermat, les Roberval, les Pascal considérèrent à leur tour la *variation continue* de certains éléments numériques (ou ce qui revient au même, de certains éléments géométriques) liés les uns aux autres et jetèrent les bases de l'édifice que devaient achever Newton et Leibniz.

Entre leurs mains, il est vrai, l'introduction de ces variations simultanées donnait lieu à des problèmes analogues, quant à la forme, à ceux qui avaient été traités jusque-là, je veux dire à la détermination de certaines constantes arithmétiques ou géométriques : maxima et minima, aires, etc.

Mais ce stade devait bientôt être dépassé ; il constituait le début d'une évolution qui n'a cessé par la suite de se poursuivre dans le même sens : nous verrons plus loin comment elle se continue encore à l'heure actuelle.

Si les auteurs dont nous venons de citer les noms s'étaient attaqués à des variations simultanées ou, comme nous disons en langage moderne, à des *fonctions*, celles-ci n'étaient pas nouvelles : elles tiraient directement leur définition des problèmes et des figures mêmes qu'avaient étudiés les Anciens, ou de problèmes peu différents. En tout cas, cette définition était connue *a priori*.

Il en fut autrement lorsque les notions nouvelles déduites de celle de fonction eurent fait la preuve de leur extrême généralité, lorsqu'elles se furent montrées identiques à elles-mêmes pour toutes les fonctions connues à propos desquelles on les introduisit : on aperçut dès lors la possibilité et bientôt la nécessité de les appliquer à des circonstances toutes différentes, à des lois *inconnues* de variation simultanée.

La Géométrie analytique imposait, à elle seule, cette attitude. Qu'une ligne ou une surface eût une existence propre, qu'elle pût être elle-même inconnue, et non plus nécessairement donnée, d'un problème, il n'y avait rien de surprenant à cela. Or, « ligne » ou « surface », pour la Géométrie analytique, est synonyme de « variation simultanée ».

Mais les applications physiques ne montrèrent pas seulement la légitimité de ce nouveau point de vue, que le Calcul

infinitésimal permettait, pour la première fois, d'aborder : elles ne permirent pas à la Science de le laisser de côté. Dès que l'on commença à s'attaquer au mouvement et à mettre ses lois à la base de la Physique, il apparut que, dans l'étude de la Nature, on ne pouvait continuer à considérer comme seule individualité, comme seul objet de recherches, le nombre déterminé ou ses équivalents géométriques (point, droite, cercle...).

L'être mathématique, en un mot, ne fut plus le nombre : ce fut la loi de variation, la fonction.

La Mathématique n'était pas seulement enrichie de nouvelles méthodes : elle était transformée dans son objet.

*
* * *

La transformation ne fut pas totale du premier coup. Nous avons, tout à l'heure, employé le langage de l'Analyse moderne, et considéré le mot « fonction » comme traduisant ceux de « variation simultanée ». Ce n'est pas précisément sous cette forme, on le sait, que la nouvelle notion se présenta à ses premiers introducteurs. On connaissait plusieurs modes de calcul applicables aux nombres et permettant de les déduire les uns des autres : les opérations classiques de l'Arithmétique, l'exponentielle et le logarithme, le passage d'un arc à ses lignes trigonométriques, etc. Pour Jean Bernoulli, par exemple, et même pour Euler, une fonction était une combinaison, quelconque, d'ailleurs, de certaines de ces opérations appliquées à un ou plusieurs nombres arbitraires.

Cette conception dissimulait, en somme, à l'Analyse le saut qu'elle allait être obligée de faire et lui permettait de garder, en quelque sorte, un pied sur la rive qu'elle devait quitter. Les opérations appelées à définir la fonction inconnue pouvaient différer, d'une part, par leur nombre et leur ordre, de l'autre, par les coefficients constants qu'elles introduisaient. Trouver une fonction de nature donnée, c'était donc déterminer un certain nombre de constantes. Entre une question ainsi posée et celle de déterminer les

aux fonctions les plus diverses, qui conduit à traiter la fonction comme on a traité le nombre lui-même.

A ce point de vue, les équations différentielles et aux dérivées partielles sont bien les analogues des équations algébriques ordinaires par lesquelles on détermine les nombres. La fonction inconnue est soumise aux opérations de la différentiation et c'est le résultat de ces opérations, effectuées dans un certain ordre, qui doit avoir une valeur donnée à l'avance.

Mais jusqu'ici, on raisonne encore sur une fonction bien déterminée, même lorsqu'elle est inconnue. De plus, on lui fait subir des opérations d'un type bien déterminé, celles du Calcul algébrique ordinaire et celles du Calcul infinitésimal — jusqu'à ces dernières années, celles du Calcul différentiel seulement lorsqu'elles devaient porter sur des fonctions inconnues.

Si l'on veut continuer à suivre, en ce qui regarde les fonctions la voie même qui a été parcourue en partant des nombres, il restera :

1° A regarder la fonction elle-même, non plus comme choisie une fois pour toutes, mais comme continûment variable ;

2° A lui faire subir, non plus seulement deux ou trois opérations déterminées, mais des opérations plus ou moins arbitraires.

La branche des Mathématiques dont l'objet est ainsi défini est ce que l'on nomme aujourd'hui le *Calcul fonctionnel*.

Il résulte des considérations précédentes qu'on doit y voir la suite et la conséquence naturelle du Calcul infinitésimal lui-même et du courant d'idées qu'il a fait naître.

* * *

Nous n'aurions toutefois justifié ainsi que d'une façon insuffisante l'utilité d'une nouvelle théorie et l'opportunité des efforts qu'on lui consacre ¹.

¹ Rien n'empêcherait, dès aujourd'hui, de généraliser le Calcul fonctionnel comme celui-ci généralise l'Analyse classique. Nul mathématicien n'y songe, aucun problème posé jusqu'ici ne donnant lieu à pareille recherche.

Il ne suffit pas pour cela, en effet, d'une de ces analogies que l'on décore trop souvent du nom de logique. Les considérations de cette nature peuvent suggérer les idées : elles ne permettent pas à elles seules, d'en affirmer l'importance et la fécondité. Il faut que des problèmes venus d'ailleurs, posés par les applications, viennent montrer comme nécessaire la marche dont on peut seulement dire, sans cela, qu'elle se présente comme naturelle à l'esprit, C'est souvent à sa naissance même qu'une théorie trouve la meilleure occasion de faire ses preuves.

C'est ce qui s'est passé pour celle qui nous occupe. Dès la fin du XVII^{me} siècle, une série de questions introduites surtout par la Mécanique — quoique la première d'entre elles, celle du plus court chemin entre deux points, fût vieille comme la Géométrie elle-même — conduisait à constituer un premier chapitre du Calcul fonctionnel, le Calcul des Variations.

Peu d'années après, celui-ci arrivait à englober, non seulement certaines questions spéciales de Mécanique, mais la Mécanique analytique (et plus tard l'Energétique) tout entière.

La recherche de l'équilibre et, bientôt après, grâce au principe de d'Alembert, celle du mouvement, furent, en effet, ramenées à des questions de maximum ou de minimum. Nombre de ces problèmes (ceux de Statique relatifs aux milieux déformables et tous ceux de la Dynamique) renfermaient, d'autre part, comme inconnues, des fonctions ou des lignes ; or, les maxima ou minima de quantités dépendant de fonctions arbitraires font l'objet du Calcul des Variations.

Le problème était ainsi transformé dans le sens même de l'évolution que nous avons indiquée plus haut. Au lieu de considérer un système déterminé de fonctions inconnues et de le soumettre directement à la différentiation, on n'obtenait les équations différentielles auxquelles il devait satisfaire qu'en regardant tout d'abord ces fonctions inconnues comme arbitrairement variables.

Cela pouvait sembler une augmentation de la difficulté :

cependant, il est acquis aujourd'hui que, dans toutes les recherches relatives aux équations différentielles en question, soit qu'il s'agisse de leur intégration, soit (comme dans les travaux connus de M. Poincaré) de l'étude qualitative des courbes intégrales, soit encore que, dépassant le cadre de l'ancienne Mécanique, on cherche à la transformer pour l'adopter aux nouveaux besoins de la Physique, c'est le principe de la moindre action qui doit servir de guide.

Grâce à ces découvertes, le Calcul des Variations et, avec lui le Calcul fonctionnel ont pris place définitivement dans la Science.

*
* *
*

Les problèmes de l'Electricité et de la Chaleur ne sont pas moins étroitement liés à des considérations de Calcul fonctionnel.

Par exemple, l'un des principaux d'entre eux, le problème de Dirichlet, consiste à déterminer une solution de l'équation classique de Laplace, lorsqu'on suppose connue la distribution de ces valeurs sur la frontière du domaine où on le considère.

Les données introduisent donc :

- 1° La forme d'une ligne ou d'une surface limitant une portion de place ou d'espace ;
- 2° Un ensemble de valeurs numériques (celles de la fonction cherchée) attachées à un point de cette ligne ou d'une surface.

On peut dire que la solution sera obtenue par certaines *opérations fonctionnelles* exécutées sur ces données : on désigne sous ce nom, en effet, tout calcul dont les résultats dépendent de la forme de certaines fonctions.

Dans le cas actuel, les données de la seconde sorte (valeurs de la fonction inconnue) interviennent d'une façon simple : on peut même, par un artifice classique (l'emploi de la « fonction de Green »), les ramener à ne plus être arbitraires, mais à dépendre seulement de deux ou trois constantes (suivant qu'on opère dans le plan ou dans l'espace).

Il n'en est pas de même pour la forme de la frontière :

elle influe sur le calcul d'une manière profonde et complexe. Si (comme on le peut, grâce à la fonction de Green) on considère l'opération fonctionnelle comme portant sur cette seule partie des données, cette opération est très compliquée : sa nature est restée mal connue jusque dans ces derniers temps.

Si Neumann et M. Fredholm ont triomphé de cette difficulté et ont pu, non seulement démontrer l'existence de la solution, mais mettre en évidence la manière dont elle dépend des données, c'est précisément en suivant, au fond, la voie indiquée dans ce qui précède qu'ils y sont parvenus. Il a fallu tout d'abord, pour cela ne pas craindre d'introduire une équation où l'inconnue fut soumise à des opérations déjà usuelles, il est vrai, en Analyse, mais autres cependant que celles qui figurent dans les équations (équations différentielles ou aux dérivées partielles) traitées jusque-là. L'inconnue y figure sous un signe d'intégration.

D'autre part, pour résoudre une telle *équation intégrale*, M. Fredholm se place au point de vue même du Calcul fonctionnel : il substitue à l'équation donnée un système d'équations du premier degré, telles que les considère l'Algèbre élémentaire, mais à une infinité d'inconnues, qui sont les valeurs successives de la fonction cherchée.

Il est remarquable, d'ailleurs, que, ainsi considérées, les équations intégrales de Fredholm apparaissent comme plus simples, au fond, que les équations différentielles auxquelles se bornait, jusque-là, l'Analyse. Il s'y présente cette circonstance importante que la classe des opérations auxquelles on soumet la fonction inconnue forme un *groupe* ; on peut combiner arbitrairement deux (ou plusieurs) opérations de cette espèce, pour en former une troisième, de même nature que les premières (ce qui n'a pas lieu pour les premiers membres des équations différentielles, tant qu'on en limite l'ordre).

Grâce à ce fait, la solution de l'équation est réduite à la formation d'une opération, laquelle appartient également à la

¹ On sait qu'on est conduit à cette question lorsqu'on cherche la distribution électrique à la surface d'un conducteur de forme donnée placé dans un champ électrique donné, lequel intervient par les valeurs de son potentiel sur cette surface.

catégorie considérée, et qui est l'*inverse* de celle qui figure au premier membre de l'équation.

Ajoutons que, même avant la Physique mathématique, la Théorie des Fonctions avait provoqué l'application du Calcul fonctionnel. Elle devait, elle aussi, y être fatalement conduite. On ne pouvait poursuivre des recherches aussi approfondies que celles auxquelles notre siècle s'est livré sur les propriétés des fonctions analytiques et affronter les obstacles qu'offre une pareille étude si l'on ne cherchait, par des transformations fonctionnelles convenablement choisies, à passer du simple au compliqué, du connu à l'inconnu. Aussi, un certain nombre des résultats les plus importants n'ont-ils pu être établis que par cette voie.

*
* *
*

Si essentiel, nous espérons l'avoir montré, que soit le Calcul fonctionnel aux progrès futurs de la Science, les difficultés qu'il soulève, et qui sont extrêmes, n'ont été élucidées jusqu'à ce jour que sur un très petit nombre de points, malgré les travaux de géomètres parmi lesquels nous citerons MM. Volterra, Pincherle, Bourlet, Fréchet, Moore, etc.

Les résultats obtenus concernent pour une grande part les opérations linéaires. Ce cas n'a pas été seulement abordé de préférence parce qu'il est plus simple que le cas général, mais aussi parce qu'il a avec lui d'importantes relations, celles mêmes que le Calcul différentiel a appris à reconnaître pour les fonctions telles qu'on les considère habituellement en Analyse.

Pour celles-ci si compliquées qu'elles se montrent lorsqu'on les étudie dans un domaine fini, la variation infinitésimale, la différentielle, est une quantité linéaire par rapport aux différentielles des variables.

Le Calcul des Variations est, pour les opérations fonctionnelles, ce que le Calcul différentiel est pour les fonctions. Il fournit, de même, pour la variation des quantités définies par les opérations fonctionnelles les plus simples et qui se

sont présentées les premières, des expressions linéaires par rapport aux variations des fonctions soumises à ces opérations : expressions que l'on a appris de M. Volterra à étendre à des opérations beaucoup plus générales.

Seulement, le mot « linéaire » n'a plus ici le sens simple qu'il reçoit forcément lorsqu'on l'applique aux fonctions d'un nombre fini d'arbitraires. Dire qu'une opération fonctionnelle est linéaire signifie uniquement que, appliquée à une somme $f_1 + f_2$ de deux fonctions, elle donne nécessairement un résultat égal à la somme de ceux auxquels on arriverait en l'appliquant successivement aux deux termes f_1 et f_2 .

Si nous y avons remplacé les mots « opération fonctionnelle » par celui de « fonction » et celui de « fonction » par « nombre », la condition précédente suffirait à exprimer qu'une fonction, supposée continue, d'un nombre déterminé de variables est, par rapport à celles-ci, un polynôme homogène du premier degré de l'Algèbre élémentaire.

Dans le domaine fonctionnel, les choses ne se passent plus aussi simplement. Une opération linéaire, au sens qui vient d'être indiqué, peut revêtir des formes assez variées. L'une des plus simples consiste à considérer la valeur de la fonction arbitraire ou encore une de ses dérivées pour une valeur déterminée de l'argument qui figure dans cette fonction. La quantité $f(a)$, où a est une constante donnée, dépend linéairement de la forme de la fonction f . Mais on a encore une quantité satisfaisant à la même condition en prenant l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x) K(x) dx ,$$

quelles que soient la fonction $K(x)$ et les constantes a, b .

C'est par des combinaisons de symboles des deux formes précédentes que s'expriment les opérations fonctionnelles linéaires auxquelles on est conduit, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut, en Calcul des Variations, du moins dans les exemples que l'on a eu à examiner jusqu'ici. Mais il est,

par contre, connu aujourd'hui qu'on n'a même pas ainsi toutes les fonctionnelles linéaires, à moins qu'on n'utilise la notion d'intégrale définie dans des conditions un peu plus générales et un peu plus compliquées que celles où on la considère usuellement.

Dans ces recherches de Calcul fonctionnel comme dans les phases antérieures de l'étude des fonctions, les deux attitudes que nous avons mentionnées précédemment sont possibles, et chacune d'elles a été adoptée.

On peut considérer la fonction sur laquelle on opère comme définie par l'ensemble des coefficients de son développement, soit en série de Taylor, soit en série trigonométrique. Cette manière d'opérer a été particulièrement employée par M. Pincherle et ses successeurs, dans les applications aux fonctions analytiques, auxquelles le premier développement (avec une origine et dans un domaine convenable) est toujours applicable.

Dans bien des cas, au contraire, on opère directement sur les valeurs mêmes de la fonction. C'est ce qui se passe en Calcul des Variations. Non seulement on n'a pas besoin de l'intermédiaire d'un développement quelconque pour obtenir la variation des expressions envisagées, mais, une fois celle-ci écrite, c'est en faisant varier individuellement certaines valeurs de la fonction inconnue, à l'exclusion des autres, qu'Euler et Lagrange en déduisent les conditions nécessaires de maximum ou minimum.

C'est d'un point de vue tout semblable que partent, nous l'avons dit, les calculs par lesquels M. Fredholm résoud son équation intégrale.

*
* *
*

Mais on a été conduit récemment à se demander si, préalablement aux recherches dont nous venons de parler, une première étude de nature toute différente n'était pas indispensable.

Pour en montrer la nécessité, nous recourrons encore à notre comparaison avec les fonctions ordinaires.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une fonction seule variable x : cette variable sera supposée arbitraire, au moins dans un certain intervalle. Si la fonction est à deux variables, celles-ci pourront être considérées comme les coordonnées d'un point lequel sera, par exemple, variable dans une certaine aire plane ; le point sera variable dans un certain volume de l'espace, s'il y a trois variables, etc. En un mot, une fonction est une quantité liée à la position d'un point, lequel décrit un contenu linéaire, superficiel ou spatial.

Si les notions classiques relatives aux fonctions ont pu être constituées sans trop de peine, c'est que les propriétés des continus en question nous étaient familières et nous apparaissaient comme évidentes, même celles qui, on le sait aujourd'hui, donnent lieu à d'insurmontables difficultés lorsqu'on essaie de les démontrer par le raisonnement.

Dans ces dernières années seulement, la théorie des ensembles de M. Cantor nous a montré, dans le continu linéaire lui-même, une foule de propriétés et de circonstances dont nous n'avions auparavant aucune idée.

Ces circonstances singulières se rencontrent d'ailleurs effectivement dans certains chapitres de la Théorie des Fonctions. On n'a pas eu, toutefois, à les considérer dans les débuts de celle-ci et c'est ce qui lui a permis de se développer.

Nous pouvons maintenant comprendre quelle difficulté grave se présente pour le Calcul fonctionnel.

Ce dernier se trouve dans les conditions où serait la théorie des Fonctions si les propriétés du continu nous étaient totalement inconnues.

Le *continu fonctionnel* — c'est-à-dire la multiplicité obtenue en faisant varier continûment une fonction de toutes les manières possibles — n'offre, en effet, à notre esprit, aucune image simple. L'intuition géométrique ne nous apprend rien, *à priori*, sur son compte.

Nous sommes forcés de remédier à cette ignorance, et nous ne pouvons le faire qu'analytiquement, en créant à l'usage du continu fonctionnel, un chapitre de Théorie des ensembles.

C'est ce qu'un jeune géomètre, M. Fréchet, a déjà entrepris. Les résultats auxquels il est parvenu pour le nouveau continu, montrent, avec ceux auxquels nous sommes habitués dans l'espace ordinaire, de notables différences. C'est ainsi, pour ne donner qu'un exemple, que la notion de limite peut être caractérisée par plusieurs sortes de propriétés qui, équivalentes entre elles dans ce dernier cas, ne le sont plus dans le précédent¹.

Ces travaux devront être continués. La tâche la moins délicate ne sera peut-être pas de savoir quelles sont les circonstances qui n'interviendront que dans des cas compliqués, comme le font, dans la Théorie des Fonctions, les ensembles parfaits non continus — et celles qui, au contraire, se présenteront à chaque instant.

Rien n'est peut-être plus propre que les recherches que nous venons de mentionner en dernier lieu à nous faire sentir toutes les obscurités que doit offrir pour nous le Calcul fonctionnel. Mais, si grandes qu'elles puissent être, son importance pour l'avenir de l'Analyse est trop vitale pour que nous puissions nous refuser à les envisager.

¹ Les récentes publications de M. Moore viennent jeter un pont entre les recherches de M. Fréchet et celles dont nous avons parlé auparavant. Partant, comme M. Fréchet, du continu fonctionnel ou même de continus plus généraux encore, M. Moore (moyennant les hypothèses nécessaires) leur applique non plus seulement la théorie des ensembles, mais les principales opérations du calcul, telles que la formation de séries convergentes.

D'autre part, le Calcul fonctionnel vient de recevoir de très importants perfectionnements dans la Thèse qu'a soutenue, devant l'Université de Paris, M. Paul Lévy. Mais, dans ce travail, la direction adoptée n'est pas celle que nous venons de mentionner; elle relève du point de vue de M. Volterra et des considérations présentées p. 12-13. — (Note ajoutée à la réimpression. J. H.)