Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1912)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES
Autor: Plancherel, M.
Kapitel: 1. Aperçu sur les travaux de Fredholm, Hilbert, Schmidt.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14282

LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES[1]

Née il y a à peine dix ans, la théorie des équations intégrales a attiré d'emblée l'attention des mathématiciens tant par son attrait propre que par l'importance de ses applications. Plusieurs des résultats de cette théorie sont déjà classiques et nul doute que dans quelques années les cours d'Analyse ne leur consacrent un chapitre. Aussi désirerais-je vous montrer quelques-uns des principaux points de cette théorie en reliant ses résultats à des faits algébriques connus. Mais, envisagé ainsi, mon sujet est trop vaste ; je ne pourrai parler ni des équations intégrales de 1[re] espèce

$$\int_a^b \mathrm{K}(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s)$$

ni de celles de 3[me] espèce

$$k(s)\varphi(s) + \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s)$$

caractérisées par le fait que la fonction $k(s)$ change de signe dans l'intervalle (a, b). Je ne pourrai non plus rien dire des applications de la théorie aux équations différentielles et aux équations aux dérivées partielles. A part quelques travaux que je citerai, je me permettrai de renvoyer pour la bibliographie complète au rapport que publie actuellement M. Hahn[2].

1. Aperçu sur les travaux de Fredholm, Hilbert, Schmidt.

Dans des travaux classiques, C. Neumann a montré que la solution du problème intérieur de Dirichlet pour un domaine convexe

[1] Conférence donnée à la Réunion de la Société mathématique suisse, à Berne, le 10 décembre 1911, par M. Michel Plancherel, professeur à l'Université de Fribourg.

[2] H. Hahn, *Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen*. B.G. Teubner, Leipzig, 1911. La première partie seule a paru jusqu'à présent comme « Sonderabdruck aus dem 20. Bande des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ».

peut s'exprimer comme potentiel d'une double couche portée par la frontière de ce domaine, potentiel que sa méthode de la moyenne arithmétique permet de calculer. Plus tard, H. Poincaré, levant la restriction de la convexité du domaine, montra toute l'importance de la méthode de Neumann ; puis, généralisant le problème, il posa la question de la détermination d'un potentiel de double couche par la condition que les valeurs de ce potentiel sur les deux côtés de la frontière vérifient une relation linéaire donnée. La densité de la double couche satisfait alors à une équation fonctionnelle facile à obtenir ; cette remarque, faite déjà par Neumann, fut le point de départ des recherches célèbres dans lesquelles Fredholm aborde et résout toute une classe d'équations fonctionnelles du type de l'équation rencontrée dans le problème de Neumann. Ces équations fonctionnelles, appelées aujourd'hui *équations de Fredholm* ou *équations intégrales linéaires de seconde espèce,* sont dans le cas le plus simple (le cas des fonctions de plusieurs variables n'apporte rien d'essentiellement nouveau à la théorie et se traite par les mêmes méthodes) de la forme

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s) \ . \qquad (1)$$

$f(s)$ et $K(s, t)$ y sont deux fonctions réelles données des variables réelles s, $t (a \leqq s, t \leqq b)$, λ est un paramètre et $\varphi(s)$ la fonction inconnue qu'il faut déterminer de manière à satisfaire identiquement en s dans (a, b) la relation (1). $K(s, t)$ est appelé le *noyau* de l'équation intégrale et $f(s)$ porte souvent le nom de second membre de l'équation.

Pour résoudre l'équation (1), il vient naturellement à l'esprit d'essayer de représenter la solution (comme l'ont fait Liouville et C. Neumann à l'occasion de problèmes particuliers) par un développement

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + \lambda\varphi_1(s) + \lambda^2\varphi_2(s) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(s) + \ldots \qquad (2)$$

On obtient alors les relations de récurrence

$$\varphi_0(s) = f(s) \ , \qquad \varphi_n(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi_{n-1}(t)\,dt \ , \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

qui permettent de calculer de proche en proche les coefficients de λ^n dans la série (2). Si nous introduisons les noyaux *itérés*

$$K_n(s, t) = \int_a^b K_{n-1}(s, r) K(r, t)\, dr , \qquad K_1(s, t) = K(s, t) , \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

les relations de récurrence donnent

$$\varphi_n(s) = \int_a^b K_n(s, t) f(t)\, dt$$

et $\varphi(s)$ prend la forme

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(\lambda; s, t) f(t)\, dt \tag{4}$$

avec

$$K(\lambda; s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(s, t) . \tag{5}$$

Sous la seule hypothèse que $K(s, t)$ et $f(s)$ sont des fonctions bornées intégrables, on démontre la convergence des séries (2) et (5) dans le voisinage de $\lambda = 0$ et, par le fait même, l'existence dans ce voisinage d'une et d'une seule solution *bornée* donnée par (4). $\varphi(s)$ et $K(\lambda; s, t)$ sont alors des fonctions holomorphes de λ dans le voisinage de $\lambda = 0$. Il se pose naturellement à leur sujet la question difficile : *Peut-on prolonger analytiquement* $K(\lambda; s, t)$, et si oui, *quel est le caractère de la fonction de λ ainsi définie ?* La réponse à cette question fait l'objet fondamental de la théorie des équations intégrales et c'est à Fredholm que nous la devons[1]. Par une induction hardie, Fredholm est amené à mettre la *résolvante* $K(\lambda; s, t)$ sous forme de quotient de deux fonctions entières de λ

$$K(\lambda; s, t) = \frac{D(\lambda; s, t)}{D(\lambda)} = \frac{K(s, t) + \lambda A_1(s, t) + \ldots + \lambda^n A_n(s, t) + \ldots}{1 + a_1 \lambda + \ldots + a_n \lambda^n + \ldots} , \tag{6}$$

les quantités numériques a_n et les fonctions $A_n(s, t)$ ayant les

[1] J. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles* [Acta Mathematica, t. 27 (1903), pp. 365-390].

valeurs

$$
\left.\begin{aligned}
a_n &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b \ldots (n) \ldots \int_a^b \mathrm{K}\begin{pmatrix}\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\end{pmatrix} d\sigma_1 d\sigma_2 \ldots d\sigma_n\,,\\
\mathrm{A}_n(s, t) &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b \ldots (n) \ldots \int_a^b \mathrm{K}\begin{pmatrix}s, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\\ t, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\end{pmatrix} d\sigma_1 d\sigma_2 \ldots d\sigma_n\,,
\end{aligned}\right\} \quad (7)
$$

et $\mathrm{K}\begin{pmatrix}s_1, s_2, \ldots, s_n\\ t_1, t_2, \ldots, t_n\end{pmatrix}$ étant une abréviation pour le déterminant

$$
\begin{vmatrix}
\mathrm{K}(s_1, t_1), & \mathrm{K}(s_1, t_2), & \ldots, & \mathrm{K}(s_1, t_n)\\
\mathrm{K}(s_2, t_1), & \mathrm{K}(s_2, t_2), & \ldots, & \mathrm{K}(s_2, t_n)\\
\ldots\ldots & & & \\
\mathrm{K}(s_n, t_1), & \mathrm{K}(s_n, t_2), & \ldots, & \mathrm{K}(s_n, t_n)
\end{vmatrix}.
$$

Sous la seule hypothèse que le noyau $\mathrm{K}(s, t)$ est une fonction bornée intégrable, il établit la convergence dans tout le plan de la variable complexe λ des séries $\mathrm{D}(\lambda; s, t)$, $\mathrm{D}(\lambda)$ et il vérifie directement que la fonction $\varphi(s)$ donnée par les relations (4) et (6) est solution (unique) de l'équation intégrale (1). La formule (6) répond à la question posée plus haut : elle montre que $\mathrm{K}(\lambda; s, t)$ est une *fonction méromorphe de* λ et que ses pôles, nécessairement isolés et en nombre dénombrable, sont les zéros d'une transcendante entière $\mathrm{D}(\lambda)$. On peut d'ailleurs vérifier en développant dans le voisinage de $\lambda = 0$ l'expression (6) en série entière que la série ainsi obtenue est identique à (5), donc, que (6) est le prolongement analytique de (5). C'est ce qu'a fait Kellog.

Lorsque λ_0 est un zéro de $\mathrm{D}(\lambda)$, Fredholm montre ensuite que l'équation *homogène*

$$
\varphi(s) - \lambda_0 \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\varphi(t)\,dt = 0
$$

admet un nombre fini > 0 de solutions (non identiquement nulles) linéairement indépendantes. Il donne le moyen de calculer ces solutions par des séries analogues à $\mathrm{D}(\lambda; s, t)$ et il indique ensuite à quelles conditions doit satisfaire $f(s)$ pour que l'équation *inhomogène* (1) soit résoluble pour la valeur $\lambda = \lambda_0$.

La théorie générale des équations intégrales se trouve ainsi complètement édifiée dans le mémoire de Fredholm. Ce mémoire est d'une importance capitale. Mais Fredholm n'y indique pas l'intuition qui l'a guidé ni le procédé heuristique par lequel il arrive aux formules (6) et (7). Par cela même, sa méthode, malgré toute son élégance, malgré la beauté des résultats obtenus par des démonstrations très simples, présente un caractère artificiel de vérification et laisse l'esprit non entièrement satisfait. Aussi, y a-t-il quelque intérêt à connaître la voie par laquelle HILBERT (reprenant rigoureusement le procédé heuristique suivi par Fredholm) établit les formules de Fredholm. Esquissons-la rapidement. Elle revient à remplacer, conformément à la définition de l'intégrale définie comme limite d'une somme, $\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt$ par sa valeur approchée

$$\delta\sum_{q=1}^{n} K(s, t_q)\varphi(t_q)$$

$$\left(a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\ , \qquad t_{q+1} - t_q = \delta = \frac{b-a}{n}\right)$$

et à résoudre d'abord, au lieu de (1), le problème voisin

$$\varphi_n(s) - \lambda\delta\sum_{q=1}^{n} K(s, t_q)\varphi_n(t_q) = f(s) \tag{8}$$

par rapport à la fonction inconnue $\varphi_n(s)$. Il est à prévoir, et Hilbert le démontre en toute rigueur, que $\lim\limits_{n=\infty}\varphi_n(s)$ existe et fournit la solution cherchée $\varphi(s)$ de (1). Calculons donc $\varphi_n(s)$; faisons, pour cela, s successivement égal à t_1, t_2, ..., t_n dans (8). Si nous notons

$$\varphi_n(t_p) = x_p\ , \qquad \delta K(t_p, t_q) = k_{pq}\ , \qquad f(t_p) = f_p\ , \tag{9}$$

nous obtenons alors un système linéaire

$$x_p - \lambda\sum_{q=1}^{n} k_{pq}x_q = f_p\ , \qquad (p = 1, 2, \dots, n) \tag{10}$$

de n équations à n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$. Le déterminant $D_n(\lambda)$ des coefficients des inconnues est un polynôme de degré n en λ

$$D_n(\lambda) = 1 - \lambda\sum_{p=1}^{n}\delta K(t_p, t_p) + \frac{\lambda^2}{2\,!}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\delta^2\begin{vmatrix} K(t_p, t_p), & K(t_p, t_q) \\ K(t_q, t_p), & K(t_q, t_q)\end{vmatrix} - \dots$$

Le mineur $D_n(\lambda; t_p, t_q)$ de l'élément figurant à la $p^{\text{ième}}$ colonne et à la $q^{\text{ième}}$ ligne du déterminant $D_n(\lambda)$ est un polynôme de degré $n-1$

en λ ; il a pour expression, si $p \neq q$

$$D_n(\lambda\,;\, t_p,\, t_q) = \delta\lambda \left[K(t_p,\, t_q) - \lambda \sum_{r=1}^{n} \delta \begin{vmatrix} K(t_p,\, t_q) & K(t_p,\, t_r) \\ K(t_r,\, t_q) & K(t_r,\, t_r) \end{vmatrix} + \cdots \right].$$

La solution x_p du système (10) est donnée par

$$x_p = \frac{1}{D_n(\lambda)} \sum_{q=1}^{n} f_q D_n(\lambda\,;\, t_p,\, t_q)$$

et $\varphi_n(s)$ se calcule ensuite par

$$\varphi_n(s) = f(s) + \lambda\delta \sum_{p=1}^{n} K(s,\, t_p) x_p \;.$$

Au passage à la limite $n = \infty$, les sommes multiples qui figurent comme coefficients des puissances de λ tendent vers les intégrales multiples dont elles sont des valeurs approchées ; $D_n(\lambda)$ converge vers le *déterminant de Fredholm* $D(\lambda)$, $D_n(\lambda\,;\, t_p,\, t_q)$ vers $D(\lambda\,;\, s,\, t)$ lorsque t_p tend vers s et t_q vers t. On retrouve de cette manière les formules de Fredholm et tout revient à justifier ce passage à la limite pour rendre rigoureuse cette méthode. C'est ce que fait Hilbert dans la 1re partie de la 1re des 6 notes qu'il a consacrées à la théorie des équations intégrales[1].

Mais là n'est pas le résultat le plus important de cette première note ; Hilbert spécialise le noyau en le supposant symétrique. Par une transformation orthogonale effectuée sur la forme quadratique $\sum_{p,q} k_{pq} x_p x_q$ qui se présente alors, il la transforme en une somme $\sum_{p=1}^{n} \frac{y_p^2}{\lambda_p}$ et obtient en passant à la limite des résultats de la plus haute importance sur l'existence des racines de $D(\lambda) = 0$, sur les relations d'orthogonalité des solutions de l'équation intégrale homogène et sur le développement de fonctions arbitraires en séries procédant suivant les solutions de l'équation intégrale homogène. Nous reviendrons plus loin sur ces résultats.

C'est à une méthode de résolution entièrement différente qu'aboutit E. Schmidt dans sa thèse classique[2]. Guidé par les résultats obtenus par Hilbert dans le cas du noyau symétrique, il

---

[1] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* [Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1904, 1905, 1906, 1910].

[2] E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*. I Teil : Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener [Mathematische Annalen, Bd. 63 (1907), pp. 433-476].

montre que la résolution de l'équation générale peut se ramener à celle de l'équation à noyau symétrique et il aborde directement l'étude de l'équation intégrale homogène à noyau symétrique. Il établit par des raisonnements directs et très simples tous les théorèmes de Fredholm et de Hilbert dont l'énoncé ne fait pas intervenir les séries de Fredholm; puis, par une méthode imitée de méthodes de Schwarz et de Græfe, il établit l'existence d'un paramètre singulier et montre que la résolvante du noyau symétrique est une fonction méromorphe à pôles simples. La résolution de l'équation intégrale inhomogène découle ensuite facilement de celle de l'équation homogène. Etablissant la forme canonique du noyau symétrique, il retrouve et généralise (en les débarrassant d'une restriction inutile) les théorèmes de développement de Hilbert. La thèse de Schmidt présente des qualités de simplicité et d'élégance remarquables; les démonstrations y font transparaître immédiatement les analogies algébriques profondes de la théorie des équations intégrales.

Les nombreux travaux parus à la suite des travaux cités n'ont pas modifié les lignes générales de la théorie. Nous ne citerons en passant que ceux de Plemelj et de Goursat relatifs à l'étude de la résolvante de Fredholm dans le voisinage de ses pôles et ceux de J. Schur démontrant sans l'intermédiaire des formules de Fredholm plusieurs propriétés des équations intégrales à noyau asymétrique. Par contre, des points de vue tout nouveaux ont été apportés par Hilbert dans ses 4^{me} et 5^{me} notes[1] : sa méthode des formes quadratiques à une infinité de variables a permis d'aborder des cas qui échappent à la théorie de Fredholm.

2. Analogies algébriques de la théorie des équations intégrales.

Du fait que les formules de Fredholm s'obtiennent comme cas limite des formules de résolution d'un système de n équations linéaires à n inconnues, il est à prévoir que la théorie des équations intégrales présentera des analogies avec celle de ces systèmes. MM. Hilbert et Tœplitz ont, dans leurs études sur les formes bilinéaires à une infinité de variables, insisté sur le fait que la notion de déterminant, qui joue un si grand rôle dans l'exposition ordinaire de la théorie des équations algébriques linéaires, est difficilement extensible au cas d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues. Aussi, pour bien montrer ces analogies, allons-nous d'abord, avec M. Tœplitz, énoncer sous une forme qui diffère de la forme ordinairement suivie, les théorèmes relatifs à la résolution des systèmes d'équations linéaires,

[1] *Loc. cit.*