

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1912)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES DÉTERMINANTS A PLUSIEURS DIMENSIONS
Autor: Lecat, Maurice
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-14292>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LES DÉTERMINANTS A PLUSIEURS DIMENSIONS

1. Le jour est proche, semble-t-il, où les déterminants à plusieurs dimensions entreront dans l'enseignement supérieur, les éléments de leur théorie venant légitimement compléter celle des déterminants ordinaires. On commence à s'apercevoir, en effet, de divers côtés, que cette étude aurait une réelle valeur éducative, et cette seule raison serait déjà suffisante; mais il y a cette autre considération à l'appui, que les déterminants de classe supérieure constituent un puissant instrument de recherche, dont le mathématicien, qu'il soit algébriste, analyste ou géomètre, doit pouvoir se servir à l'occasion.

C'est à l'illustre CAYLEY que revient le mérite d'avoir posé les bases de la théorie; les deux ou trois pages qu'il lui consacre mettent hors de doute son intérêt et sa fécondité. Les complications qui surgissent, quand on passe de 2 à 3 et ensuite à n dimensions, montrent que la généralisation est loin d'être banale, et qu'il en est pour les déterminants tout comme pour la théorie des fonctions ou pour le calcul des variations, par exemple, quand on passe du cas où il n'y a qu'une seule variable à celui où il y en a plusieurs, et comme en mécanique céleste, où le problème des deux corps est puéril à côté de celui des trois corps. Certains théorèmes, extrêmement élémentaires, sur les déterminants ordinaires, peuvent être étendus dans une foule de directions au cas de plusieurs dimensions, et la complexité quasi-inextricable qui en résulte presque toujours, réside le plus souvent, non pas dans les résultats, qui sont des plus élégants dans leur simplicité, mais dans les laborieuses démonstrations qui les fournissent.

Nous voudrions, dans le présent travail, où nous avons cherché à éviter tout ce qui serait de nature à rendre la lecture pénible¹, montrer, au moins dans les grandes lignes, d'où proviennent les difficultés, quels sont les principaux résultats acquis ou à obtenir, et comment s'affirme l'ampleur de cette théorie. Nous n'indiquons

¹ Pour les démonstrations et tout ce qui exige un grand usage de notations spéciales, consulter les Mémoires originaux ou notre ouvrage intitulé *Leçons sur la théorie des déterminants à n dimensions*, Gand, 1910, ou encore notre *Abbrégé*, Gand, 1911.

pas les sources¹, ce qui ne serait d'aucune utilité, eu égard au point de vue auquel nous nous plaçons; quant à la terminologie, nous la réduisons au strict nécessaire. Par contre, nous ne pourrions passer sous silence les permanents, dont l'étude est intimement liée à celle des déterminants.

2. Soit un système de p^n éléments représentés par une même lettre affectée de n indices i_1, \dots, i_n prenant chacun p valeurs entières, par exemple les p premiers nombres. Le nombre k est le *rang* de l'indice i_k . On peut supposer ces éléments placés aux points de coordonnées i_1, \dots, i_n , dans un espace à n dimensions pourvu d'un système d'axes orthogonaux. On a ainsi une matrice de *classe* n et *d'ordre* p .

Lorsque la classe est supérieure à 2 et qu'on désire représenter la matrice en plan, on la décompose en tranches planes que l'on juxtapose convenablement, de manière à obtenir un carré ou un rectangle, suivant que n est pair ou impair. Les matrices cubiques peuvent se représenter en perspective.

L'*axe* est formé de l'ensemble des *vertèbres*, éléments dont toutes les coordonnées sont égales. Des éléments sont dits *transversaux* si l'on ne peut trouver deux d'entre eux dans une même *tranche* (à $n - 1$ dimensions). Un espace *orthoaxial* est un espace à $n - 1$ dimensions, perpendiculaire à l'axe et contenant un certain nombre d'éléments. On considère aussi les *files*, qui, pour $n = 2$, se confondent avec les tranches (lignes et colonnes).

Dans la matrice que nous venons de définir, choisissons p éléments transversaux et effectuons le produit de ces éléments. La somme des $(p!)^{n-1}$ termes que l'on peut ainsi former est appelée *permanent* de classe n et d'ordre p . Si, dans chaque produit, on dispose les facteurs par ordre de grandeur croissante des indices (formant une *rangée*) d'un rang déterminé, appelé *rang de l'indice fixe*, et si l'on affecte alors le produit du signe + ou du signe - suivant que la somme des nombres des inversions dans toutes les rangées est paire ou impaire, la somme algébrique des termes obtenus est appelée *déterminant* à n dimensions et d'ordre p .

On peut ramener la recherche du signe d'un terme à la détermination du nombre des intersections se trouvant dans un graphique composé de lignes droites.

Pour simplifier l'énoncé de certains théorèmes, il est utile d'introduire le *grade*; c'est la classe diminuée d'une unité, ou encore l'exposant de la puissance à laquelle il faut éléver $p!$ pour avoir le nombre des termes du permanent ou du déterminant.

¹ Elles sont toujours indiquées dans les ouvrages cités; voir en particulier la notice historique, de préférence dans l'*Abrégé*. La bibliographie donnée dans ce travail doit être complétée par trois notes qui ont paru récemment dans l'*Intermédiaire des mathématiciens* (1911, p. 283-284) et dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (1911-192, première partie, p. 119-124; seconde partie, p. 286-297).

Rien n'empêche de considérer des permanents ou déterminants de classe ou d'ordre infinis, mais les questions de convergence sont assez épineuses, surtout quand c'est la classe qui tend vers l'infini. Il ne faut pas perdre de vue, toutefois, que les propriétés géométriques des espaces convergent quand le nombre des dimensions s'accroît indéfiniment; on sait, d'ailleurs, qu'on a fait récemment de l'analyse à un infinité dénombrable de variables indépendantes. — Les déterminants *normaux* et *normaloïdes* ordinaires ont été généralisés au cas d'un nombre fini de dimensions.

La méthode symbolique de définition des déterminants ordinaires a été étendue pour n dimensions, en considérant, non plus un seul, mais $n - 1$ systèmes indépendants d'unités alternées d'ordre p . Cette représentation a l'inconvénient d'être indirecte, mais elle se prête admirablement à la démonstration de certains théorèmes. Son avantage dépend de la nature de la question; il est difficile d'énoncer une règle, seule la pratique peut indiquer au chercheur s'il convient d'employer cette méthode dans tel ou tel cas.

3. Examinons quelles sont les propriétés fondamentales des déterminants et des permanents. Les déterminants se divisent, à ce point de vue, en deux catégories bien distinctes: ceux de classe paire et ceux de classe impaire. Les permanents de classe quelconque jouissent de certaines des propriétés des déterminants de classe impaire; par contre, tout permanent, comme tout déterminant de classe paire, « n'a qu'une seule valeur ». C'est ce qui résultera de ce qui va suivre.

Du fait que la parité du nombre total des inversions dans les n rangées d'indices d'une permutation d'éléments à n indices change ou non, lorsqu'on permute deux facteurs entre eux, suivant que n est impair ou pair, il résulte que le choix de l'indice fixe a ou n'a pas d'importance, selon que n est impair ou pair; d'où l'on conclut que, dans les déterminants de classe impaire et dans ceux-là seulement, un rôle spécial est attribué à l'indice fixe, et qu'un déterminant *général* de classe impaire possède autant de valeurs distinctes qu'il y a d'unités dans sa classe.

Appelons *indice régulier* tout indice autre que l'indice fixe d'un déterminant de classe impaire; *files et tranches critiques* ou *régulières*, celles qui correspondent respectivement à un indice régulier ou non, les tranches critiques, ou *strates*, étant perpendiculaires aux files critiques. Par définition donc, toutes les files et tranches d'un déterminant de classe paire sont régulières. Un *espace diagonal* est critique ou régulier suivant qu'il contient ou non la *direction* (d'une file) critique. En particulier, dans un déterminant cubique, il y a, passant par l'*élément-origine*, deux *plans diagonaux réguliers* et un *plan diagonal critique* (qu'on appelle parfois *plan diagonal principal*, *plan axial* ou *plan-permanent*).

Tout déterminant change de signe si l'on échange entre elles deux tranches parallèles régulières, tandis que (principe de commutation) la permutation de strates entre elles conserve la valeur avec le signe. Un déterminant général de classe impaire ayant deux ou plusieurs strates identiques n'est pas nul. Dans les déterminants de classe impaire, toutes les directions ne sont donc pas équivalentes, ce qui justifie les distinctions établies dans les définitions; suivant la direction critique, les déterminants de classe impaire se comportent comme des permanents.

On peut passer d'une valeur d'un déterminant de classe impaire aux autres valeurs, en utilisant la notion de *section*. On appelle ainsi la somme des termes, pris dans le permanent, où les rangs des seules rangées négatives (rangées dont le nombre des inversions est négatif) sont assignées. Il y a une *section permanente*, constituée par la somme des *termes permanents*, dont les n rangées sont positives. Les formules qui expriment les n valeurs du déterminant permettent d'écrire aisément, en fonction des sections (il y en a 2^{n-1}), la *valeur moyenne* du déterminant, moyenne arithmétique de ses n valeurs, et la moyenne géométrique, plus compliquée. Il est assez légitime de considérer cette valeur moyenne dans certains problèmes (notamment dans la recherche de déterminants unisignants) qui cessaient d'avoir un sens lorsque la classe est impaire, à moins qu'on ne considère qu'une des valeurs.

4. Il est évident que si les éléments satisfont à des conditions convenables, le nombre des valeurs distinctes du déterminant de classe impaire peut être inférieur à la classe¹. On voit de suite quel champ fécond et vaste est ainsi offert au chercheur!

Si le déterminant a même valeur ∇ lorsque le rang de l'indice fixe est choisi parmi m nombres distincts, on dit que ∇ est une valeur d'*ordre de multiplicité* m ; les m rangs en question, ainsi que les indices occupant ces rangs, sont *équivalents*. Le déterminant est *uniforme*² s'il n'a qu'une seule valeur (d'ordre de multiplicité n), tous les indices étant équivalents. L'uniformisation d'un déterminant de classe impaire est l'opération qui consiste à soumettre les éléments à des conditions rendant le déterminant uniforme. Le premier exemple de déterminant uniforme qui se présente à l'esprit est celui qui est trouvé suivant une tranche; un tel déterminant est *uniformément nul*, c'est-à-dire uniforme et nul. Un exemple de déterminant ayant en général, pour n impair, deux valeurs distinctes, l'une, d'ordre de multiplicité $n - 1$, étant nulle, est

¹ Dans notre *Abrégé*, nous disons qu'un déterminant de classe impaire est *holomorphe* ou *méromorphe*, suivant qu'il a ou n'a pas toutes ses valeurs distinctes. Nous y employons diverses autres dénominations qui simplifient singulièrement le langage, mais nous ne pouvons songer à introduire ici tout ce cortège de termes, dont certains peuvent n'être que provisoires.

² On pourrait aussi adopter le mot *univoque* qui présenterait peut-être certains avantages.

fourni par la matrice générale ayant au moins deux tranches parallèles identiques.

Les formules qui expriment, en fonction des sections, les diverses valeurs d'un déterminant général de classe impaire, permettent d'écrire les relations existant entre les sections d'un déterminant donné, dont toutes les valeurs ne sont pas distinctes, et notamment d'un déterminant uniforme. Ces relations sont assez simples si le déterminant est uniformément nul; en particulier, pour $n=3$, les quatre sections sont égales entre elles.

Les conditions qui égalisent deux ou plusieurs valeurs peuvent être de diverses natures, mais les deux plus intéressantes consistent à rendre des indices permutable (des éléments devenant ainsi égaux entre eux), ou bien à annuler certains éléments, les autres restant quelconques et sans relation.

5. Entrons dans quelques détails au sujet des *déterminants à indices permutable*. Une matrice ordinaire est dite symétrique quand les deux indices peuvent être rangés par ordre de grandeur croissante, c'est-à-dire quand ils sont *permutable*. Cette notion peut être généralisée de diverses manières pour les matrices de classe supérieure. Dès que n est supérieur à 2, il devient possible de permuter certains indices, tout en laissant d'autres *immobiles*. Si l'on place entre parenthèses les groupes d'indices non permutable dans le groupe, et entre crochets les indices permutable entre eux, les trois cas les plus typiques peuvent être représentés ainsi :

$$(I) \quad | * * \dots [(* * * \dots) , (* * * \dots) , \dots] | ,$$

$$(II) \quad | * * \dots [* * \dots] , [* * * \dots] , \dots | ,$$

$$(III) \quad | * * \dots [[* * * \dots] , [* * * \dots] , \dots] | ,$$

chaque astérisque représentant un indice, et les points ayant la signification habituelle. Les indices qui ne sont ni entre parenthèses ni entre crochets sont non-permable ou immobiles. Pour (II), les nombres des indices dans les divers crochets peuvent être inégaux.

Le nombre des valeurs distinctes (la classe étant impaire) est égal au nombre des indices immobiles, augmenté du nombre des indices d'un groupe dans le cas du type (I), de celui des ensembles d'indices permutable dans le type (II), de l'unité dans le type (III). Si donc, dans le troisième cas, il n'y a pas d'indice immobile, le déterminant est uniforme. Quant aux ordres de multiplicité, on voit qu'ils sont égaux : (I) au nombre des ensembles compris entre parenthèses, (II) aux nombres des in-

dices compris entre crochets, (III) au nombre des indices permutable¹.

Les déterminants (I, II, III) comprennent tous, comme cas particulier, le déterminant *actinomorphe*²

$$| [* * * \dots] | ,$$

où tous les indices sont permutable entre eux, et, plus généralement, le déterminant

$$(T) \quad | * * \dots [* * * \dots] | ,$$

dit *actinomorphe d'espèce v*, s'il y a v indices entre crochets. Si les indices permutable sont tous réguliers, le déterminant est dit *orthoactinomorphe*; si ces indices comprennent l'indice fixe pour n impair, le déterminant est *métactinomorphe*.

Bon nombre de déterminants de classe impaire qui se présentent dans les applications, sont, ou bien actinomorphes, ou bien du type (T) à un seul indice immobile; dans le premier cas, la nature du problème n'indique pas quel est l'indice fixe et n'a pas à le déterminer; dans le second cas, cet indice est, au contraire, imposé par les conditions mêmes de la question: c'est le plus souvent l'indice immobile. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour le déterminant des dérivées d'ordre quelconque d'un système de formes $f_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots)$, et, en particulier, pour les déterminants qui représentent les composés de deux formes binaires. Nous y reviendrons.

6. L'étude des déterminants de classe impaire, qui doivent uniquement à des zéros la propriété d'avoir des valeurs multiples, est difficile et très peu avancée. Le problème général à résoudre est de trouver, en utilisant le moins de zéros possible, ou en conservant le plus grand nombre de termes, un déterminant de classe impaire, de manière à ce qu'il n'ait plus qu'un nombre donné de valeurs distinctes, et, en particulier, soit uniformisé.

A la dernière question se rattache la représentation de sommes de puissances par des déterminants ou par des permanents; il s'agirait de trouver la plus haute valeur que l'on puisse donner à μ

dans l'expression $\sum_{i=1}^{\mu} a_i^p$ de la valeur d'un déterminant à n dimensions et d'ordre p dont les éléments sont nuls ou égaux aux a , et

¹ La recherche de tous les déterminants des trois types ayant n dimensions et seulement N valeurs distinctes est un problème purement arithmologique dont la position est très simple, mais dont la solution l'est moins.

² Ce terme, qui est emprunté à la Botanique, trouve sa justification dans la manière dont se présentent les figures formées par les éléments conjugués, à un observateur qui serait placé à l'élément-origine et regarderait dans la direction de l'axe de la matrice cubique.

de savoir comment il faut placer les zéros¹. Il est évident que les α ne peuvent se trouver que sur des *transversales permanentes*² sans éléments communs, les α d'une même transversale ayant même indice; le nombre μ est donc égal au nombre de ces transversales. Le déterminant obtenu est uniforme et égal au permanent correspondant.

Signalons quelques autres résultats relatifs à l'uniformité. Etant donnés, dans le plan, trois systèmes de trois points, le déterminant dont les éléments sont les aires des triangles ayant pour sommets un point dans chaque système, est uniformément nul. On peut généraliser au cas de $2\nu + 1$ systèmes de $2\nu + 1$ points situés dans un même espace à 2ν dimensions³. Le déterminant en question est donc, comme les déterminants actinomorphes, uniforme quelle que soit la classe.

7. Il n'en est pas toujours ainsi : l'uniformité peut être subordonnée à la classe (on connaît des déterminants dont l'uniformité cesse d'exister pour $n = 3$), à l'ordre, ou simultanément à l'ordre et à la classe (il y a une catégorie de déterminants dont l'uniformité a lieu sauf pour $n = 3$, $p = 2$, auquel cas ils ont leurs trois valeurs distinctes).

Un problème, intéressant mais difficile, serait de trouver et étudier les déterminants dont l'uniformité n'a lieu, ou ne cesse d'exister, que pour des valeurs déterminées de la classe (par exemple pour tous les carrés impairs), ou de l'ordre, ou pour des relations données auxquelles doivent satisfaire l'ordre et la classe, et en particulier pour les solutions, entières et positives, en nombre fini ou infini, d'une équation indéterminée du premier degré, de la forme

$$ap + bn = c.$$

Il faudrait aussi considérer les couples de déterminants ayant même ordre et même classe, et dont l'uniformité est liée aux relations

$$ap + bn = c, \quad an + bp = c,$$

a, b, c étant des nombres entiers.

En ce qui concerne les déterminants dont l'uniformité est indé-

¹ Le même problème se pose pour les *superdéterminants*, dont il sera question plus loin.

² Une transversale est dite permanente lorsque le terme auquel elle donne lieu est un terme permanent, c'est-à-dire a le signe + quel que soit l'indice fixe. Si les transversales n'étaient pas permanentes, on aurait une somme *algébrique* de puissances, tout au moins pour une des valeurs du déterminant.

³ Nous avons indiqué ailleurs plusieurs sujets d'étude se rattachant à ce résultat, qui est analogue au suivant : étant donnés, dans l'espace, trois systèmes de trois directions, est uniformément nul le déterminant dont les éléments sont les sinus des angles solides formés par trois droites appartenant aux trois systèmes. Ces relations se démontrent très aisément en utilisant les propriétés fondamentales des déterminants.

pendante de la classe, tout en étant subordonnée à l'ordre, on a le théorème suivant : *si l'élément général d'un déterminant est, par rapport à un seul indice, une fonction rationnelle et entière de degré inférieur à l'ordre diminué d'une unité, le déterminant est nul si la classe est paire; il a deux valeurs, distinctes en général, si n est impair, l'une, égale à zéro, est d'ordre de multiplicité $n - 1$, l'autre, simple, est réalisée quand l'indice considéré est l'indice fixe. Si l'élément général est, par rapport à deux indices au moins (considérés séparément), une fonction satisfaisant aux mêmes conditions que plus haut, le déterminant est uniformément nul quelle que soit la classe.* Si l'ordre n'est pas supérieur au degré de la fonction augmenté de l'unité, le déterminant a, dans les deux cas, toutes ses valeurs distinctes. On suppose, bien entendu, que la fonction, considérée par rapport à un quelconque de ses arguments, n'a pas de zéro parmi les p premiers nombres, sinon le déterminant serait toujours uniformément nul.

8. Si l'on multiplie tous les éléments d'un déterminant uniforme par une même quantité, l'uniformité est évidemment conservée. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit de même si la quantité, déterminée ou quelconque, est *additionnée*?

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'uniformité d'un déterminant dont les éléments sont formés par les sommes (ou par les produits) des éléments correspondants de plusieurs déterminants uniformes de même classe et de même ordre?

Enfin, un dernier sujet d'étude que nous tenons à signaler serait celui des systèmes de déterminants de classe impaire ayant tous les mêmes valeurs, mais à des ordres de multiplicité différent d'un déterminant à un autre.

9. Avant de continuer l'étude des déterminants proprement dits, il convient de signaler deux généralisations des notions de permanent et de déterminant. Dans leur définition, on dit qu'il n'y a qu'un seul élément (première condition) d'un même terme dans une même tranche à $n - 1$ dimensions (seconde condition). En modifiant ces deux restrictions, on est conduit à deux extensions.

Nous n'insisterons pas sur la première, qui ne présente que peu d'intérêt : elle consiste, étant donnés des éléments en nombre $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$ et situés dans un parallélépipède à n dimensions, à prendre plus d'un élément d'un même terme dans une même tranche à $n - 1$ dimensions. La question du signe est assez compliquée, nous la passerons sous silence.

La seconde généralisation est plus importante. Etant donnés p^n éléments disposés en cube à n dimensions, elle consiste à remplacer par $g - 1$ le nombre $n - 1$ intervenant dans la seconde restriction, c'est-à-dire à exiger que tout terme ne puisse avoir qu'un seul élément dans toute tranche à $g - 1$ dimensions, mais

les éléments d'un terme quelconque devant se trouver dans une même tranche à g dimensions. Tous les produits étant pris avec le signe $+$, on dira qu'on a un *permanent de genre g*; on aura un *déterminant de genre g* (*superdéterminant* pour $g < n$), si l'on donne à chaque terme le signe obtenu en comptant les inversions où il y en a, c'est-à-dire dans les g rangées formées d'indices différents. Si le genre est impair, il faut prendre pour indice fixe un indice dont le rang, compté en faisant abstraction des rangées autres que les g rangées considérées (cette condition est essentielle), a une valeur déterminée; le *nombre des valeurs distinctes d'un superdéterminant de genre impair g est donc égal à g*. La plus grande valeur du nombre g est évidemment n , cas des permanents et déterminants proprement dits. Quant à la limite inférieure, c'est l'unité, valeur pour laquelle les éléments d'un terme sont pris sur une même file. Dans le cas où $n = 2$, le déterminant n'est distinct du permanent que si le genre est égal à la classe, et, par conséquent, les superdéterminants ont au moins trois dimensions.

La notion de section d'un déterminant, ainsi que l'expression des diverses valeurs à l'aide de ces sections, peuvent être étendues au cas du genre quelconque; mais, dans le cas de déterminants *spéciaux* de genre impair, la recherche du nombre N des valeurs distinctes, et des degrés m de multiplicité de ces valeurs, est beaucoup moins aisée que pour les déterminants proprement dits. Ces nombres N et m dépendent en général du genre, et, en particulier, un superdéterminant peut être uniforme pour certains genres, sans l'être pour les autres. Mais, si la matrice est *actinomorphe*, l'uniformité a lieu pour tous les genres, quels que soient l'ordre et la classe; il y a, dans ce cas, en tout, n valeurs, d'ordres de multiplicité $1, 3, \dots, r$, en désignant par r le plus grand nombre impair compris dans n . Il peut arriver qu'un superdéterminant ne soit uniforme pour tous les genres, que si la classe, ou l'ordre, ou les deux, satisfont à certaines conditions. Ici, plus encore que précédemment, on voit combien est vaste le champ offert au chercheur!

10. Mais revenons aux permanents et déterminants proprement dits. On peut les développer de deux manières : par abaissement de la classe, ou par abaissement de l'ordre.

Voyons la première manière d'opérer. On démontre que *tout permanent de classe n et d'ordre p est égal à une somme de $(p!)^{n-r}$ permanents de même ordre p et de classe r inférieure à n*; et que *tout déterminant de classe n et d'ordre p est égal à une somme algébrique de permanents ou de déterminants, ou à une somme de déterminants, de classe r et d'ordre p, en nombre $(p!)^{n-r}$* . En particulier, *tout déterminant cubique peut se développer en une somme de déterminants ordinaires, le signe sommatoire s'appli-*

quant à l'indice fixe, ou bien, si le signe Σ ne s'applique pas à l'indice fixe, *en une somme algébrique de permanents contenant la direction critique, ou de déterminants ordinaires ne contenant pas cette direction.*

De ces propositions, on déduit une foule de conséquences, dont la plus importante est que *tout déterminant de classe impaire et d'ordre p , dont toutes les strates sont identiques, est égal à $p!$ fois le déterminant de classe immédiatement inférieure formé par une strate.*

Le développement par abaissement de l'ordre est une évidente généralisation de celui qui est bien connu pour les déterminants ordinaires. Le *mineur* d'un élément est le coefficient de cet élément dans le développement; il est égal, au signe près, au *sous-déterminant* obtenu en supprimant, dans le déterminant donné, les tranches se croisant sur l'élément considéré. Ces définitions posées, les théorèmes sont tout à fait semblables à ceux qui ont lieu pour $n = 2$; citons le premier d'entre eux: *tout déterminant (permanent) est égal à la somme des éléments d'une tranche quelconque multipliés respectivement par les mineurs (sous-permanents) correspondants.* On en conclut immédiatement que si tous les éléments d'une tranche quelconque sont nuls, la matrice (déterminant ou permanent) est nulle.

Le développement par abaissement de l'ordre permet de généraliser la propriété du déterminant à strates identiques, en considérant plusieurs groupes de strates égales, et de représenter la somme des carrés des mineurs d'ordre k d'un déterminant ordinaire B d'ordre p à l'aide du déterminant cubique de même ordre p , dont k strates sont formées par B , les autres strates ayant toutes pour éléments les premiers mineurs de B . Ceci montre que la théorie des déterminants ordinaires ne peut être légitimement séparée de celle des déterminants à plusieurs dimensions.

Le principe de décomposition des permanents ou déterminants à éléments polynomes, qui résulte immédiatement de la théorie des mineurs, est tout analogue à celui qui a lieu pour $n = 2$. Nous l'appellerons le *principe de distribution*.

11. L'examen des analogies existant entre les principes fondamentaux de l'algèbre (produits ordinaires) et des déterminants de classe impaire ou des permanents, la commutation et la distribution, montre que *tous les théorèmes sur les permanents à n dimensions et sur les déterminants de classe $2r + 1$ se réduisent aux propriétés des produits ordinaires pour $n = 1$ ou $r = 0$, et inversement.*

On voit aisément la fécondité de cette importante remarque, au point de vue de l'obtention de propriétés nouvelles.

Une relation d'analogie semblable existe entre les déterminants de classe paire et les déterminants ordinaires; en d'autres termes,

la théorie des déterminants de classe paire généralise l'algèbre des nombres alternés¹.

12. Une des propriétés les plus importantes que l'on déduit de la théorie des mineurs, est le *principe de l'addition des tranches régulières*, en vertu duquel on peut, dans un déterminant à n dimensions, ajouter aux éléments d'une tranche (à $n - 1$ dimensions) les éléments correspondants d'autres tranches parallèles, multipliés par des constantes quelconques, pourvu que, si la classe est impaire, ces tranches ne soient pas des strates.

Ce principe admet une foule de conséquences fort élégantes. En voici quelques-unes :

Si, dans un déterminant de classe paire, la somme des éléments de chaque file est nulle, tous les premiers mineurs sont égaux.

Si un déterminant est nul, il existe une même relation linéaire entre les éléments d'une tranche régulière, parallèle à une direction donnée, mais la réciproque n'est vraie que pour les déterminants ordinaires, et les mineurs des éléments correspondants de tranches parallèles, régulières d'un déterminant nul ne sont en général proportionnels que si $n = 2$.

Tout déterminant CYCLOSYMÉTRIQUE de classe et ordre pairs (déterminant où deux éléments sont égaux dès que $2k$ indices de l'un additionnés respectivement aux indices des mêmes rangs de l'autre, donnent des sommes toutes égales à $p + 1$) est décomposable en un produit de deux déterminants de même classe, mais d'ordre inférieur de moitié.

La dérivation des permanents et des déterminants est aussi aisée pour n quelconque que pour $n = 2$; la dérivée k ^{ème} s'exprime symboliquement de la même manière².

13. La notion d'uniformité peut être étendue aux mineurs. Le problème qui se pose d'abord est de trouver, avec le moins de zéros possible, un déterminant général de classe impaire, de manière à assurer l'uniformité pour tous les mineurs d'un ou de plusieurs ordres donnés, par exemple $1, 2, \dots, r$ ou $p, p - 1, \dots, r$, et en particulier pour tous les mineurs. Plus généralement, on pourrait exiger que les mineurs d'ordre r aient k_r valeurs distinctes. Pour quelles valeurs de n, p, r, k_r le problème est-il possible?

On peut aussi demander de trouver un déterminant à indices permutables suivant une loi définie, de manière à réaliser les mêmes conditions; ou bien d'établir entre les éléments des relations conduisant au même but.

Les déterminants où exclusivement certains mineurs (mineurs axiaux, diagonaux, mineurs correspondant aux éléments d'un ou

¹ Et ceci permet de donner un nouveau sens, plus large et plus profond, au célèbre mot de Sylvester : « *Algebra upon algebra* ».

² Cf. l'*Enseignement mathématique*, 1904, p. 457.

plusieurs espaces orthoaxiaux, aux éléments d'un mineur, etc., etc.) sont uniformes, méritent d'être aussi considérés.

On voit aisément qu'à un déterminant D de classe impaire n , correspondent n^2 déterminants formés au moyen des premiers mineurs de D : on peut, en effet, choisir l'indice fixe de n manières, non seulement pour le déterminant, mais aussi pour les mineurs. La condition que le déterminant soit *circulant*¹ cubique est suffisante pour que les n^2 valeurs soient égales entre elles, c'est-à-dire pour qu'il n'y ait qu'un seul *adjoint*. Cela a encore lieu pour d'autres déterminants, mais on ne connaît pas les conditions nécessaires et suffisantes. Quant à la valeur elle-même, les conditions pour qu'un déterminant cubique D , d'ordre p , soit circulant ou à strates identiques, sont chacune suffisantes pour que l'adjoint soit égal, à un facteur numérique près, à la puissance $p - 1$ de D . Cela n'a pas lieu en général, contrairement à ce qu'on croyait avoir démontré. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes ? Quelle relation y a-t-il entre un déterminant général et son adjoint ? Ces questions ne paraissent pas simples à élucider.

14. Arrivons maintenant à la multiplication des déterminants de classe supérieure. C'est un chapitre des plus difficiles mais aussi des plus intéressants.

Le produit de deux déterminants, l'un de classe n_1 , l'autre de classe n_2 , peut, si le produit $n_1 \cdot n_2$ est pair², se mettre sous forme d'un déterminant de classe $n_1 + n_2 - 2$, les éléments étant des polynômes d'un nombre de termes égal à l'ordre commun aux trois déterminants. Une importante restriction est que le signe sommatoire (qui figure dans l'expression de l'élément général du déterminant produit) ne peut s'appliquer qu'aux indices réguliers.

Ce théorème, que nous appellerons règle (I), généralise celui de Cauchy sur les déterminants ordinaires, et n'est qu'un cas particulier de l'extension, au cas d'un nombre quelconque de dimensions, du théorème de Binet-Cauchy sur les déterminants multiples.

Comme cas particulier du théorème souligné, on a le suivant : *le produit d'un déterminant ordinaire par un déterminant de classe quelconque peut toujours être mis sous forme d'un déterminant de cette classe.* Cette règle, qui est très utile dans les applica-

¹ La définition d'un circulant à n dimensions est analogue à celle d'un circulant ordinaire ; le déterminant est actinomorphe et dépend de p éléments distincts, disposés sur une file. On a considéré un déterminant (que nous appelons *cyclique*) qui généralise le circulant à n dimensions et qui est réductible à un déterminant de classe inférieure d'une unité, dont les éléments sont des fonctions linéaires et homogènes des éléments du déterminant primitif, multipliés par des racines de l'unité. Ce déterminant n'est qu'un cas très particulier d'un autre, dont l'étude serait intéressante, mais hérissée de grandes difficultés.

² Déjà CAYLEY avait découvert cette importante restriction. Bien qu'assez évidente si l'on songe au rôle de l'indice fixe, cette condition est passée inaperçue de tous les mathématiciens ultérieurs, sauf d'un seul. Aussi, presque tous les travaux écrits sur les déterminants à plusieurs dimensions sont-ils entièrement ou partiellement erronés. — Il est essentiel d'observer que la restriction doit être maintenue, en général, si le déterminant n'a pas toutes ses valeurs distinctes.

tions, comprend elle-même, comme cas plus particulier, celle-ci : *le produit d'un déterminant ordinaire par un déterminant cubique peut se mettre sous forme d'un déterminant cubique*; précisons cet énoncé¹ en assimilant, pour la commodité du langage, une strate à un déterminant ordinaire : *il faut multiplier le déterminant ordinaire par chaque strate* (selon la règle de Cauchy). Cette loi s'applique à la multiplication des normaux, mais elle cesse d'avoir lieu en général pour les normaloïdes.

On sait que le carré d'un déterminant ordinaire est un déterminant symétrique (ou symétrisable). En général, le carré d'un déterminant de classe paire peut se mettre sous forme d'un déterminant spécial où deux *groupes* d'indices sont *permutables*². On sait aussi que tout déterminant symétrique gauche est, en valeur absolue, le carré d'une fonction entière des éléments, et que *le carré de tout déterminant peut être mis sous forme d'un déterminant symétrique gauche spécial*. Le théorème lui-même a été généralisé pour $2n$ dimensions³, mais on n'obtient plus la réciproque, pour $n > 1$, si l'on effectue le carré en procédant comme pour démontrer la propriété soulignée.

Si l'on exprime, d'après la règle (I), le produit d'un déterminant de classe paire n_1 par un déterminant de classe impaire n_2 ayant s valeurs distinctes, le déterminant de la matrice obtenue possède $n_1 + s - 1 - \delta$ valeurs distinctes, δ valant 0 ou 1 suivant que l'indice auquel s'applique le signe sommatoire a ou n'a pas d'indice équivalent dans le déterminant-facteur de classe impaire⁴. Evidemment, une seule de ces valeurs représente le produit à effectuer. En particulier, si $n_2 = 1$, le déterminant a n_1 valeurs distinctes, dont l'une, d'ordre de multiplicité $n_2 - 1$, représente la valeur du produit.

Au sujet de la règle (I), ajoutons qu'elle permet de généraliser, pour plusieurs dimensions, le théorème de Kronecker sur les déterminants ordinaires.

15. La règle (II) est la suivante : *le produit de deux déterminants, l'un de classe n_1 , l'autre de classe n_2 , peut toujours se mettre sous forme d'un déterminant de classe $n_1 + n_2 - 1$, à éléments monômes*; en particulier, le produit de deux déterminants ordinaires peut se

¹ Nous ne le faisons pas pour le cas général, car cela exigerait des notations compliquées qui nous entraîneraient beaucoup trop loin.

² Le principe de l'addition des tranches régulières montre que si, dans un déterminant, la somme des carrés des éléments est égale à l'unité sur chaque file régulière d'une direction donnée et si la somme des produits des éléments correspondants de deux files quelconques de cette direction est nulle, le déterminant est égal à un mineur quelconque divisé par l'élément correspondant. En utilisant le résultat du texte, on voit en outre que le déterminant

$\frac{n}{2} - 1$
vaut $\pm (p !)^{\frac{n}{2} - 1}$.

³ Il est probable qu'on peut encore l'étendre au cas de rn dimensions. D'autre part, il y aurait lieu de généraliser pour plusieurs dimensions les recherches faites sur les déterminants bisymétriques ordinaires.

⁴ Nous avons cru devoir donner ici cet énoncé, bien qu'il ne soit peut-être qu'assez difficilement compréhensible. Nous prions toutefois le lecteur de le passer au besoin.

mettre sous forme d'un déterminant cubique. Ce théorème, généralisé au cas du produit d'un nombre quelconque de déterminants, peut s'énoncer en disant que *le produit de plusieurs déterminants peut se mettre sous forme d'un déterminant de grade égal à la somme des grades des facteurs.*

En supposant que tous les facteurs sont de même classe, on arrive à ce résultat : *tout déterminant de classe $k\sigma + 1$ peut être considéré comme étant le produit symbolique de k déterminants de classe $\sigma + 1$.* En particulier, *tout déterminant à n dimensions est assimilable à un produit symbolique de $n-1$ déterminants ordinaires.*

La puissance k d'un déterminant quelconque, effectuée suivant la règle (II), a une structure remarquable; ainsi, pour le carré d'un déterminant ordinaire, on aura, de deux manières, un déterminant cubique symétrique par rapport au plan diagonal critique, dont les éléments seront tous des carrés.

Le produit des n valeurs d'un déterminant de classe n impaire, a également une structure remarquable.

L'étude des déterminants exprimant les produits et puissances de déterminants à indices permutablez présente un certain intérêt. A remarquer surtout le déterminant qui est égal au produit d'un déterminant orthoactinomorphe par le déterminant méta correspondant.

Le produit de deux déterminants uniformes de classes impaires n_1 et n_2 , effectué par la règle (II), donne un déterminant uniforme; en effet, la position de l'indice fixe dans le déterminant-produit correspond aux diverses positions de l'indice fixe dans les facteurs; or, dans ceux-ci, par hypothèse, cette position n'a pas d'importance en ce qui concerne la valeur.

La règle (II) est vraie pour les permanents.

16. Il existe, pour le produit de plusieurs déterminants, une règle mixte combinant les règles (I) et (II); nous ne l'énoncerons, ainsi que divers corollaires, que pour les produits de déterminants ou de permanents ordinaires. *Le produit de $2v$ déterminants ordinaires peut se mettre sous forme d'un déterminant de classe $2v$ à éléments polynômes.* Cette règle a lieu pour le produit de plusieurs déterminants dont les éléments sont des nombres alternés, à condition de prendre comme produit le permanent au lieu du déterminant.

La loi s'applique d'ailleurs au cas du produit de plusieurs déterminants multiples, et, en particulier, toute puissance paire $2v$ d'un déterminant multiple ordinaire peut se mettre sous forme d'un déterminant actinomorphe de classe $2v$ et à éléments polynômes. S'il y a r déterminants-facteurs identiques entre eux, le déterminant produit est actinomorphe d'espèce r .

Comme application de la règle mixte, il y a notamment l'intégration d'une équation aux dérivées partielles, mise sous forme d'un déterminant remarquable.

La règle mixte est aussi applicable au produit d'un permanent par des déterminants : *le produit d'un permanent ordinaire par $2v$ déterminants ordinaires peut se mettre sous forme d'un déterminant de classe $2v + 1$ à éléments polynômes.* En particulier, le produit d'un permanent ordinaire par une puissance paire $2v$ d'un déterminant ordinaire peut se mettre sous forme d'un déterminant orthoactinomorphe de classe $2v + 1$. Si r facteurs sont égaux entre eux, le déterminant produit est orthoactinomorphe d'espèce r . Si la matrice du permanent est égale à celle de r déterminants, le produit est métactinomorphe d'espèce $r + 1$; en particulier, *le produit d'un permanent ordinaire par la puissance $2v$ du déterminant correspondant peut se mettre sous forme d'un déterminant actinomorphe de classe $2v + 1$.* Plus spécialement, *le produit d'un permanent ordinaire par le carré du déterminant correspondant peut se mettre sous forme d'un déterminant cubique actinomorphe.*

17. Arrivons maintenant à une notion qui comprend, comme cas particuliers, celles de permanent et de déterminant; nous voulons parler des *déterminants-permanents*. Le déterminant ordinaire où les vertèbres sont les seuls éléments différents de zéro a été généralisé par la considération d'un déterminant à n dimensions trouvé d'une certaine manière (nous n'insistons pas sur ce point qui nous conduirait trop loin), et qui est égal à l'expression qui résulte d'un déterminant de classe impaire N , lorsqu'on remplace, dans ce déterminant, chaque terme par un certain permanent correspondant à g dimensions. Cette expression porte le nom de déterminant-permanent de classe N et de genre g . On a un déterminant simple en donnant à g une valeur particulière convenable; un permanent de classe g en faisant $N = 1$; la réciproque de ce dernier point peut s'exprimer ainsi: *tout permanent de classe n peut se mettre sous forme d'un déterminant ou d'un permanent troués de classe $2n$ ou $2n - 1$.* Pour le déterminant cubique, précisons ce qui précède: si tous les éléments extérieurs au plan diagonal critique, passant par l'élément-origine, sont nuls, le déterminant est égal au permanent des éléments non nuls (c'est pourquoi le plan en question est parfois appelé plan-permanent); si les éléments différents de zéro se trouvent dans un plan diagonal régulier, le déterminant cubique est égal au déterminant ordinaire des éléments non nuls.

La classe minimée du déterminant représentant un déterminant-permanent de classe N et de genre g est $N + 2g - 2$, nombre impair, car N est toujours impair; la classe paire minimée est $N + 2g - 1$. Ces deux déterminants sont en quelque sorte les *formes canoniques* du déterminant-permanent. Elles servent avantageusement à démontrer que *les genres des diverses formes du produit de deux déterminants-permanents de genres g et γ sont*

$g + \gamma + 1$, $g + \gamma$, $g + \gamma - 1$, les deux premiers n'étant réalisables que pour des déterminants-permanents proprement dits (c'est-à-dire ne se réduisant pas à de simples permanents ou déterminants); les éléments sont polynômes si le genre est $g + \gamma$.

18. A part différents cas absolument banaux, celui du déterminant trouvé suivant un espace diagonal et en particulier celui du déterminant invertébré, la question de la recherche du nombre des termes d'un déterminant particulier à n dimensions présente de grandes difficultés qui n'ont pas été vaincues. Le cas où la matrice générale est trouée pourrait être considéré comme cas particulier de celui où la matrice possède des éléments égaux entre eux, mais il est préférable de séparer ces deux problèmes. Dans le premier cas, en effet, le nombre φ des termes ne dépend pas du signe, et il n'y a pas lieu de distinguer le permanent du déterminant. Dans le second cas, il n'en est plus de même. Dans le cas du déterminant, il faut tenir compte de la parité de la classe, et de la position de l'indice fixe si n est impair.

Les problèmes sur le nombre φ des termes d'un permanent trouvé se divisent en deux catégories, la première comprenant les questions où il s'agit de calculer φ le permanent étant donné, la seconde celles où l'on demande de trouver le permanent avec un nombre donné de zéros de manière à extrémer φ .

On peut imposer diverses restrictions; l'une d'elles consiste à fixer des limites entre lesquelles doit se maintenir la distance des zéros pris deux à deux; une autre à devoir trouver suivant un lieu géométrique défini; par exemple: un permanent est invertébré, le trouver suivant une seconde transversale à choisir de manière à extrémer φ . Ces problèmes sont encore à résoudre. Un résultat qui se démontre assez facilement et que le nombre minimé de zéros annulant le permanent général est p^{n-1} , ces éléments formant une tranche.

La détermination du nombre φ d'un déterminant à indices permutables suivant une loi donnée, est un problème qui présente un certain intérêt, notamment au point de vue de l'invariantologie des formes algébriques; mais il n'est pas aisé. Ce qui est certain, c'est que la théorie des fonctions génératrices doit jouer un rôle important dans sa solution.

19. Arrivons aux applications des déterminants à plusieurs dimensions. Nous ne dirons rien des applications géométriques et arithmologiques, pour ne considérer que la théorie des formes algébriques.

Le déterminant — orthoactinomorphe — d'un système de formes de degré n est un invariant simultané d'indice n. Il est visible que ce théorème n'exige aucune restriction quant au nombre des formes, à leurs degrés et aux nombres des variables. Par exemple, si l'on donne des formes distinctes en nombre inférieur à p et supérieur

à l'unité, on pourra obtenir un certain nombre d'invariants simultanés. Si les p formes sont toutes identiques, on est conduit à dire que *le déterminant — actinomorphe — d'une forme de degré pair n est un invariant d'indice égal au degré n*. Toute forme de degré pair possède donc un invariant dont le degré est égal au nombre des variables, et toute forme binaire de degré pair n , un invariant d'indice n et du second degré, ayant $\frac{n}{2} + 1$ termes : l'intermutant.

Tout hessien de classe paire ν (déterminant actinomorphe des dérivées d'ordre ν) d'une forme est un covariant de cette forme. — Si une forme se réduit à une puissance d'une forme linéaire, tous ses hessiens sont nuls à partir de celui de classe 2 (hessien ordinaire). La réciproque de ce théorème présente un grand intérêt : pour quelles valeurs de ν , n , p la réciproque est-elle vraie ?

La méthode symbolique se prête admirablement à l'application des déterminants de classe supérieure à l'étude des formes. Elle permet de démontrer très aisément qu'*on obtient un covariant simultané d'indice n, en prenant le déterminant à $n + 1$ dimensions formé par les dérivées d'ordre n de plusieurs fonctions*, les éléments d'une même strate étant les dérivées d'une même fonction ; on a un covariant d'indice r si les fonctions sont représentées par une même lettre affectée de $n - r + 1$ indices, dont l'un est l'indice fixe, le déterminant étant alors orthoactinomorphe d'espèce r et à $n + 1$ dimensions.

On voit aisément que *le k^{ème} composé de deux formes binaires est un déterminant orthoactinomorphe de classe k + 1 et du second ordre*, ce qui explique le fait que tous les composés k^{èmes} d'une forme avec elle-même sont identiquement nuls si k est impair. On voit aussi que *tout covariant d'une forme binaire peut être représenté par une somme de déterminants orthoactinomorphes du second ordre et dont les éléments sont des dérivées de la forme*. Ce théorème peut être étendu au cas de plusieurs variables.

Certaines relations remarquables entre composés de formes binaires s'expriment à l'aide de déterminants de classe supérieure, généralisant des propriétés, connues depuis longtemps, exprimées par des déterminants ordinaires.

Quant aux contrevariants et divariants, il est clair que les déterminants de classe supérieure en fournissent autant qu'on veut.

Ce qui précède permet de faire entrevoir le rôle important que les déterminants de classe supérieure sont susceptibles de jouer en géométrie analytique. Qu'il suffise de citer cet exemple : *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan soit tangent à une quadrique s'exprime par un déterminant cubique orthoactinomorphe*.

Maurice LECAT (Watermael, Bruxelles).