

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 14 (1912)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Kapitel:** Sur un certain développement en fraction continue.  
**Autor:** Mirimanoff, D.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

même sens du même angle le centre C autour de  $q$ ;  $t_1$  — l'axe de collinéation — étant l'intersection de P et  $\pi$ ;  $q$  — le premier axe secondaire — étant l'intersection de  $\pi$  avec le plan mené par C parallèlement à P. Supposons que, par le mouvement de rotation, A soit venu en  $A_1$  et C en  $C_1$ .

En désignant par M le centre de la circonférence décrite par C et par N celui de la circonférence décrite par A, nous constatons que les triangles CMC<sub>1</sub> et ANA<sub>1</sub> sont semblables, parce que tous les deux sont isocèles et par condition  $\sphericalangle CMC_1 = \sphericalangle ANA_1$ . Et comme les triangles sont aussi semblablement situés, on a :

$$CC_1 \parallel AA_1, \quad (1)$$

De la similitude des triangles A'NA et A'MC on a :

$$A'A : A'C = NA : MC. \quad (\alpha)$$

De même de la similitude des triangles ANA<sub>1</sub> et CMC<sub>1</sub> on a :

$$NA : MC = AA_1 : CC_1. \quad (\beta)$$

De  $(\alpha)$  et  $(\beta)$  on obtient :

$$A'A : A'C = AA_1 : CC_1, \quad (2)$$

La relation (2) avec le résultat (1) dit que la ligne de jonction des points A<sub>1</sub> et C<sub>1</sub> passe par A'. Le théorème est donc démontré.

L. HANTOS (Kecskemét, Hongrie)

### Sur un certain développement en fraction continue.

*A propos d'une communication de M. BAATARD.*

Au cours d'une communication présentée à Soleure (*En's. math.*, 1912, p. 31-37), M. BAATARD a signalé une propriété curieuse d'une famille de fractions continues qu'il ne serait peut-être pas inutile de mettre en lumière.

Soient  $a_0$  le terme initial et  $a_1, a_2, \dots, a_m$  les quotients incomplets d'une période dans le développement en fraction continue de  $\sqrt{A}$ ; je rappelle que  $a_m = 2a_0$ .

A ce terme initial et à la suite infinie des quotients incomplets répondent les réduites  $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0}{1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}, \text{ etc.}$ , qui convergent de plus en plus vers  $\sqrt{A}$ .

Appliquons à l'une des réduites  $\frac{p_n}{q_n}$  le procédé ( $\omega'$ ) de M. Baatard<sup>1</sup>.

Nous aurons une nouvelle valeur approchée  $b$  de  $\sqrt[n]{A}$  qui s'exprime ainsi

$$b = \frac{p_n^2 + Aq_n^2}{2p_nq_n}.$$

Or, dans les exemples choisis par M. Baatard, on a, quel que soit  $n$ ,  $b = \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ ; en d'autres termes, on a la relation

$$(1) \quad \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_n^2 + Aq_n^2}{2p_nq_n}.$$

M. Baatard fait remarquer avec raison que ce fait ne se présente pas toujours.

Une question se pose alors : quels sont les nombres  $A$  dont les développements en fraction continue fournissent des réduites vérifiant la condition (1) ?

Je rappellerai d'abord que la relation (1) a lieu pour tout  $A$ , lorsque l'indice  $n$  est un multiple de  $m$ ,  $m$  étant le nombre des termes de la période.

On a, en effet, quel que soit  $i$ ,

$$(2) \quad p_{im} - q_{im}\sqrt[m]{A} = (p_m - q_m\sqrt[m]{A})^i,$$

d'où

$$p_{2im} - q_{2im}\sqrt[m]{A} = (p_m - q_m\sqrt[m]{A})^{2i},$$

et par conséquent (Cf. *Serret*, Cours d'alg. sup., 5<sup>e</sup> édit., t. 1,

<sup>1</sup> Dans le cas général d'une racine quelconque  $\sqrt[n]{A}$ , ce procédé consiste à remplacer une première valeur approchée  $a$  de  $\sqrt[n]{A}$  par la valeur

$$b = \frac{p' + (n-1)a}{n}, \quad \text{où} \quad p' = \frac{A}{a^{n-1}}$$

c'est-à-dire par

$$a - \frac{a^n - A}{na^{n-1}} = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

en posant  $x^n - A = f(x)$ . On voit donc que le procédé ( $\omega'$ ) revient à celui de Newton appliqué à l'équation  $x^n - A = 0$ . (Cf. *Encycl. des Sciences math.*, Tome I, art. 23, p. 282, et Tome II, art. 26, p. 58.)

p. 76 et 77)

$$(3) \quad p_{2im} - q_{2im}\sqrt{A} = (p_{im} - q_{im}\sqrt{A})^2,$$

ce qui donne bien

$$\frac{p_{2im}}{q_{2im}} = \frac{p_{im}^2 + Aq_{im}^2}{2p_{im}q_{im}}.$$

Mais la relation (1) n'a pas lieu pour tout  $A$ , lorsque l'indice  $n$  n'est pas un multiple de  $m$ . Soit, par exemple,  $A = 7$ . Ici  $a_0 = 2$ , la période contient quatre termes 1, 1, 1, 4. En appliquant ( $\omega'$ ) à  $\frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{1}$ , on a  $b = \frac{11}{4}$  et comme  $\frac{p_2}{q_2} = 3$ , on voit que  $b \neq \frac{p_2}{q_2}$ .

Je dis que les nombres  $A$  qui vérifient la relation (1) sont *caractérisés* par la condition :

$$(4) \quad 2a_0 \text{ est divisible par } A - a_0^2.$$

Cette condition est nécessaire et suffisante. *Elle est nécessaire.* En effet, la relation (1) étant supposée vraie pour tout  $n$ , on doit avoir en particulier

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1^2 + Aq_1^2}{2p_1q_1} = \frac{a_0^2 + A}{2a_0},$$

et comme

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_0a_1 + 1}{a_1},$$

on en tire

$$2a_0 = a_1(A - a_0^2).$$

Donc  $2a_0$  est divisible par  $A - a_0^2$  et le quotient de la division est précisément égal à  $a_1$ .

La condition (4) est suffisante. Supposons que  $2a_0$  soit divisible par  $A - a_0^2$  et posons

$$\frac{2a_0}{A - a_0^2} = d.$$

En formant les quotients *complets*  $x_1, x_2$ , on trouve

$$x_1 = \frac{a_0 + \sqrt{A}}{A - a_0^2} = \frac{2a_0 + \frac{1}{x_1}}{A - a_0^2} = d + \frac{1}{x_1(A - a_0^2)}.$$

Donc  $a_1 = d$  et comme  $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$ , on en tire

$$x_2 = x_1(A - a_0^2) = 2a_0 + \frac{1}{x_1}.$$

Par conséquent  $a_2 = 2a_0$  et  $x_3 = x_1$ .

La période se compose donc de deux termes :

$$a_1 = \frac{2a_0}{A - a_0^2} \quad \text{et} \quad a_2 = 2a_0,$$

ou du seul terme  $2a_0$ , lorsque  $A - a_0^2 = 1$ .

Si donc la condition (4) est vérifiée, la relation (1) a lieu, en vertu de (3) (en posant  $m = 2$ ), pour toutes les réduites de rangs pairs. Il nous reste à la démontrer pour les réduites de rangs impairs.

Or

$$\frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{A - a_0^2}{2a_0} = \frac{a_0^2 + A}{2a_0} = \frac{p_1^2 + Aq_1^2}{2p_1q_1}.$$

La relation (1) a donc lieu pour  $n = 1$  et on peut écrire dans ce cas particulier

$$(5) \quad p_2 - q_2\sqrt{A} = \frac{1}{A - a_0^2}(p_1 - q_1\sqrt{A})^2.$$

Considérons maintenant une réduite quelconque  $\frac{p_{2i-1}}{q_{2i-1}}$  de rang impair. Soit

$$\frac{\alpha}{\beta} = a_1 + \frac{1}{2a_0} = \frac{2a_0a_1 + 1}{2a_0}.$$

On a, comme on sait (*Serret*, p. 62),

$$p_{2i-1} - q_{2i-1}\sqrt{A} = (p_1 - q_1\sqrt{A})(\alpha - \beta x_1)^{i-1},$$

et comme  $\alpha - \beta x_1 = p_2 - q_2\sqrt{A}$ , il vient

$$p_{2i-1} - q_{2i-1}\sqrt{A} = (p_1 - q_1\sqrt{A})(p_2 - q_2\sqrt{A})^{i-1}$$

d'où, en vertu de (2) et de (5),

$$p_{2(2i-1)} - q_{2(2i-1)}\sqrt{A} = \frac{1}{A - a_0^2}(p_{2i-1} - q_{2i-1}\sqrt{A})^2$$

ce qui conduit à la relation (1) pour  $n$  impair. Si donc la condition (4) est vérifiée, la relation (1) a lieu quel que soit  $n$ . C.Q.F.D.

Il résulte de là que les nombres  $A$  vérifiant la relation (1) sont de la forme

$$a_0^2 + \frac{2a_0}{a_1},$$

$a_0$  étant un nombre entier quelconque et  $a_1$  un diviseur quelconque de  $2a_0$ . Le nombre des nombres  $A$  compris entre  $a_0^2$  et  $(a_0 + 1)^2$  est donc égal au nombre des différents diviseurs de  $2a_0$ .

Pour  $a_0 = 1$ , le diviseur  $a_1 = 2$  ou  $1$ , d'où  $A = 2$  et  $3$ .

Pour  $a_0 = 2$ , le diviseur  $a_1 = 4, 2, 1$ , d'où  $A = 5, 6, 8$ .

J'ajouterai que les nombres  $A$  ont déjà été rencontrés par Euler (Cf. l'article de M. AUBRY, *Ens. math.*, 1912, p. 204, exerc. 24).

Bien que ces résultats se déduisent très simplement des propriétés classiques des fractions continues, j'ai pensé qu'il y avait quelque intérêt à les rappeler, d'autant plus qu'ils se rattachent au travail de M. Aubry que je viens de citer.

D. MIRIMANOFF (Genève).

---

## CHRONIQUE

---

### Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

#### I. — RÉUNION DE CAMBRIDGE. 21-28 août 1912.

##### PROGRAMME GÉNÉRAL.

**Mercredi 21 août**, 9 h. du matin : Séance du Comité central.

3 h. de l'après-midi : *Séance des délégués*. Elle aura lieu dans l'une des salles du Laboratoire des ingénieurs, au siège du Congrès.

**Jeudi 22 août**, 10 h. du matin. *Séance d'ouverture* du 5<sup>e</sup> Congrès international des mathématiciens. Sir George GREENHILL, Vice-président de la Commission, parlera des travaux de la Commission.

**Vendredi 23 août**, 9 h. du matin, 1<sup>re</sup> SÉANCE, en commun avec la section d'enseignement du Congrès : *Présentation des travaux des*