Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1912)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Sur un certain développement en fraction continue.

Autor: Mirimanoff, D.

même sens du même angle le centre C autour de q ; t_1 — l'axe de collinéation — étant l'intersection de P et π ; q - le premier axe secondaire — étant l'intersection de π avec le plan mené par C parallèlement à P. Supposons que, par le mouvement de rotation, A soit venu en A_1 et C en C_1.

En désignant par M le centre de la circonférence décrite par C et par N celui de la circonférence décrite par A, nous constatons que les triangles CMC_1 et ANA_1 sont semblables, parce que tous les deux sont isoscèles et par condition $\sphericalangle CMC_1 = \sphericalangle ANA_1$. Et comme les triangles sont aussi semblablement situés, on a :

$$CC_1 \parallel AA_1, \tag{1}$$

De la similitude des triangles A'NA et A'MC on a :

$$A'A : A'C = NA : MC. \tag{α}$$

De même de la similitude des triangles ANA_1 et CMC_1 on a :

$$NA : MC = AA_1 : CC_1. \tag{β}$$

De (α) et (β) on obtient :

$$A'A : A'C = AA_1 : CC_1, \tag{2}$$

La relation (2) avec le résultat (1) dit que la ligne de jonction des points A_1 et C_1 passe par A'. Le théorème est donc démontré.

L. Hantos (Kecskemét, Hongrie)

Sur un certain développement en fraction continue.

A propos d'une communication de M. Baatard.

Au cours d'une communication présentée à Soleure (*Ens. math.*, 1912, p. 31-37), M. Baatard a signalé une propriété curieuse d'une famille de fractions continues qu'il ne serait peut-être pas inutile de mettre en lumière.

Soient a_0 le terme initial et a_1, a_2, ... a_m les quotients incomplets d'une période dans le développement en fraction continue de $\sqrt{A}$; je rappelle que $a_m = 2a_0$.

A ce terme initial et à la suite infinie des quotients incomplets répondent les réduites $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0}{1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, ... , $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$, etc., qui convergent de plus en plus vers $\sqrt{A}$.

Appliquons à l'une des réduites $\frac{p_n}{q_n}$ le procédé (ω') de M. Baatard[1].

Nous aurons une nouvelle valeur approchée b de $\sqrt{A}$ qui s'exprime ainsi

$$b = \frac{p_n^2 + Aq_n^2}{2p_n q_n} .$$

Or, dans les exemples choisis par M. Baatard, on a, quel que soit n, $b = \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$; en d'autres termes, on a la relation

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_n^2 + Aq_n^2}{2p_n q_n} . \tag{1}$$

M. Baatard fait remarquer avec raison que ce fait ne se présente pas toujours.

Une question se pose alors : quels sont les nombres A dont les développements en fraction continue fournissent des réduites vérifiant la condition (1) ?

Je rappellerai d'abord que la relation (1) a lieu pour tout A, lorsque l'indice n est un multiple de m, m étant le nombre des termes de la période.

On a, en effet, quel que soit i,

$$p_{im} - q_{im}\sqrt{A} = (p_m - q_m\sqrt{A})^i , \tag{2}$$

d'où

$$p_{2im} - q_{2im}\sqrt{A} = (p_m - q_m\sqrt{A})^{2i} ,$$

et par conséquent (Cf. *Serret*, Cours d'alg. sup., 5e édit., t. 1,

---

[1] Dans le cas général d'une racine quelconque $\sqrt[n]{A}$, ce procédé consiste à remplacer une première valeur *approchée* a de $\sqrt[n]{A}$ par la valeur

$$b = \frac{p' + (n-1)a}{n} , \qquad \text{où} \qquad p' = \frac{A}{a^{n-1}}$$

c'est-à-dire par

$$a - \frac{a^n - A}{na^{n-1}} = a - \frac{f(a)}{f'(a)} ,$$

en posant $x^n - A = f(x)$. On voit donc que le procédé (ω') revient à celui de Newton appliqué à l'équation $x^n - A = 0$. (Cf. Encycl. des Sciences math., Tome I, art. 23, p. 282, et Tome II, art. 26, p. 58.)

p. 76 et 77)

$$p_{2im} - q_{2im}\sqrt{A} = (p_{im} - q_{im}\sqrt{A})^2 , \tag{3}$$

ce qui donne bien

$$\frac{p_{2im}}{q_{2im}} = \frac{p_{im}^2 + Aq_{im}^2}{2p_{im}q_{im}} .$$

Mais la relation (1) n'a pas lieu pour tout A, lorsque l'indice n n'est pas un multiple de m. Soit, par exemple, $A = 7$. Ici $a_0 = 2$, la période contient quatre termes 1, 1, 1, 4. En appliquant (ω') à $\frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{1}$, on a $b = \frac{11}{4}$ et comme $\frac{p_2}{q_2} = 3$, on voit que $b \neq \frac{p_2}{q_2}$.

Je dis que les nombres A qui vérifient la relation (1) sont *caractérisés* par la condition :

$$2a_0 \text{ est divisible par } A - a_0^2 . \tag{4}$$

Cette condition est nécessaire et suffisante. *Elle est nécessaire.* En effet, la relation (1) étant supposée vraie pour tout n, on doit avoir en particulier

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1^2 + Aq_1^2}{2p_1q_1} = \frac{a_0^2 + A}{2a_0} ,$$

et comme

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_0a_1 + 1}{a_1} ,$$

on en tire

$$2a_0 = a_1(A - a_0^2) .$$

Donc $2a_0$ est divisible par $A - a_0^2$ et le quotient de la division est précisément égal à a_1.

La condition (4) *est suffisante.* Supposons que $2a_0$ soit divisible par $A - a_0^2$ et posons

$$\frac{2a_0}{A - a_0^2} = d .$$

En formant les quotients *complets* x_1, x_2, on trouve

$$x_1 = \frac{a_0 + \sqrt{A}}{A - a_0^2} = \frac{2a_0 + \frac{1}{x_1}}{A - a_0^2} = d + \frac{1}{x_1(A - a_0^2)} .$$

Donc $a_1 = d$ et comme $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$, on en tire

$$x_2 = x_1(\mathrm{A} - a_0^2) = 2a_0 + \frac{1}{x_1}.$$

Par conséquent $a_2 = 2a_0$ et $x_3 = x_1$.

La période se compose donc de deux termes :

$$a_1 = \frac{2a_0}{\mathrm{A} - a_0^2} \quad \text{et} \quad a_2 = 2a_0,$$

ou du seul terme $2a_0$, lorsque $\mathrm{A} - a_0^2 = 1$.

Si donc la condition (4) est vérifiée, la relation (1) a lieu, en vertu de (3) (en posant $m = 2$), pour toutes les réduites de rangs pairs. Il nous reste à la démontrer pour les réduites de rangs impairs.

Or

$$\frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{\mathrm{A} - a_0^2}{2a_0} = \frac{a_0^2 + \mathrm{A}}{2a_0} = \frac{p_1^2 + \mathrm{A}q_1^2}{2p_1q_1}.$$

La relation (1) a donc lieu pour $n = 1$ et on peut écrire dans ce cas particulier

$$(5) \qquad p_2 - q_2\sqrt{\mathrm{A}} = \frac{1}{\mathrm{A} - a_0^2}(p_1 - q_1\sqrt{\mathrm{A}})^2.$$

Considérons maintenant une réduite quelconque $\frac{p_{2i-1}}{q_{2i-1}}$ de rang impair. Soit

$$\frac{\alpha}{\beta} = a_1 + \frac{1}{2a_0} = \frac{2a_0a_1 + 1}{2a_0}.$$

On a, comme on sait (*Serret*, p. 62),

$$p_{2i-1} - q_{2i-1}\sqrt{\mathrm{A}} = (p_1 - q_1\sqrt{\mathrm{A}})(\alpha - \beta x_1)^{i-1},$$

et comme $\alpha - \beta x_1 = p_2 - q_2\sqrt{\mathrm{A}}$, il vient

$$p_{2i-1} - q_{2i-1}\sqrt{\mathrm{A}} = (p_1 - q_1\sqrt{\mathrm{A}})(p_2 - q_2\sqrt{\mathrm{A}})^{i-1}$$

d'où, en vertu de (2) et de (5),

$$p_{2(2i-1)} - q_{2(2i-1)}\sqrt{\mathrm{A}} = \frac{1}{\mathrm{A} - a_0^2}(p_{2i-1} - q_{2i-1}\sqrt{\mathrm{A}})^2$$

ce qui conduit à la relation (1) pour n impair. Si donc la condition (4) est vérifiée, la relation (1) a lieu quel que soit n. C.Q.F.D.

Il résulte de là que les nombres A vérifiant la relation (1) sont de la forme

$$a_0^2 + \frac{2a_0}{a_1} ,$$

a_0 étant un nombre entier quelconque et a_1 un diviseur quelconque de $2a_0$. Le nombre des nombres A compris entre a_0^2 et $(a_0 + 1)^2$ est donc égal au nombre des différents diviseurs de $2a_0$.

Pour $a_0 = 1$, le diviseur $a_1 = 2$ ou 1, d'où A $= 2$ et 3.

Pour $a_0 = 2$, le diviseur $a_1 = 4$, 2, 1, d'où A $= 5$, 6, 8.

J'ajouterai que les nombres A ont déjà été rencontrés par Euler (Cf. l'article de M. Aubry, *Ens. math.*, 1912, p. 204, exerc. 24).

Bien que ces résultats se déduisent très simplement des propriétés classiques des fractions continues, j'ai pensé qu'il y avait quelque intérêt à les rappeler, d'autant plus qu'ils se rattachent au travail de M. Aubry que je viens de citer.

D. Mirimanoff (Genève).

CHRONIQUE

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

I. — Réunion de Cambridge. 21-28 août 1912.

Programme général.

Mercredi 21 août, 9 h. du matin : Séance du Comité central.

3 h. de l'après-midi : *Séance des délégués.* Elle aura lieu dans l'une des salles du Laboratoire des ingénieurs, au siège du Congrès.

Jeudi 22 août, 10 h. du matin. *Séance d'ouverture* du 5e Congrès international des mathématiciens. Sir George Greenhill, Vice-président de la Commission, parlera des travaux de la Commission.

Vendredi 23 août, 9 h. du matin, 1re séance, en commun avec la section d'enseignement du Congrès : *Présentation des travaux des*