Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1912)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Sur la topologie des courbes interscendantes.

Autor: Loria, G.

commun distinct de G, ne peut, en particulier, contenir F″, c'est-à-dire un point quelconque du prolongement du segment $\overline{EB}$.

La troisième des propriétés exprimées dans l'axiome planaire de M. Peano est donc bien démontrée en fonction des deux premières et de celles qui sont exprimées par l'axiome d'ordre rappelé plus haut et par l'axiome d'après lequel *une droite est définie par deux quelconques de ses points.*

G. Combebiac (Limoges).

Sur la topologie des courbes interscendantes.

Extrait d'une lettre de M. G. Loria à Gênes,
à propos d'une Note de M. Turrière (Poitiers).

...Les remarques très sensées de M. Turrière sur les « courbes transcendantes et interscendantes » (*L'Enseignement mathématique,* T. XIV, p. 209) m'entraînent de nouveau dans un champ de recherche où je me suis tenu pendant longtemps et dans lequel je reviens toujours avec plaisir. « J'y suis, j'y reste » pour observer qu'une phrase écrite par ce géomètre a besoin, si je ne me trompe, d'un commentaire pour être comprise à sa juste valeur.

En effet, M. Turrière dit que les paraboles $y = x^m$, m étant un nombre rationnel, s'approchent de plus en plus de la courbe $y = x^{\sqrt{2}}$; or je dis qu'il faut se restreindre à ce qui arrive dans l'angle des coordonnées positives. Pour le prouver, il faut et il suffit de considérer ce qui suit :

1° Suivant que le nombre positif $m \gtreqless 1$, et suivant la forme arithmétique de son expression réduite à ses termes moindres, les paraboles $y = x^m$ se présentent sous une des SIX formes données par les figures ci-jointes :

2° Si on développe 2 en fractions continues on trouve

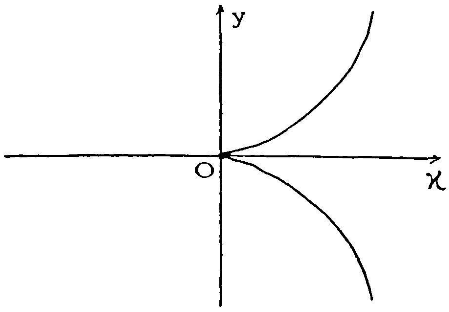
$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}\ .$$

Les premières réduites sont 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{17}{12}$ et les réduites suivantes ont alternativement les formes

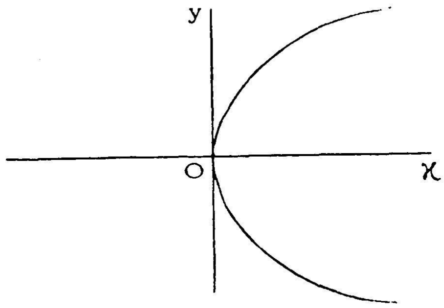
$$\frac{2h+1}{2k+1} \quad \text{et} \quad \frac{2h+1}{2k}$$

comme il s'ensuit de la loi de formation des réduites.

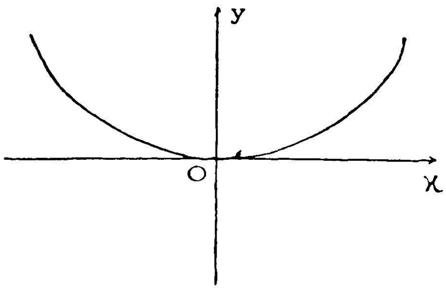
Si donc on s'arrête à une réduite de rang impair on a comme « courbe approchante » de la courbe $y = x^{\sqrt{2}}$ une courbe qui a la forme donnée par la fig. 6 ; si au contraire on s'arrête à une réduite de rang pair on trouve que la « courbe approchante » a la forme donnée par la fig. 4. Ces deux formes coïncident dans l'angle $\overset{+}{X}O\overset{+}{Y}$, mais sont tout à fait différentes dans les autres régions du plan, de manière qu'on ne peut parler de limite de ces



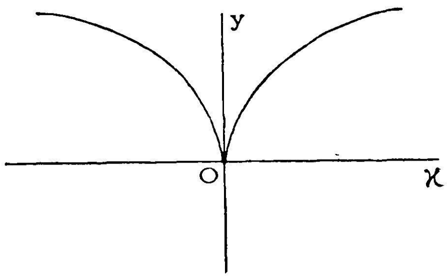
(Fig. 1) : $m = \dfrac{2h}{2k+1} < 1$.



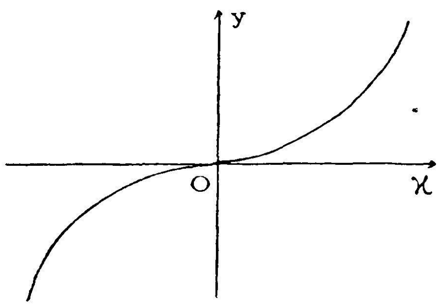
(Fig. 2) : $m = \dfrac{2h}{2k+1} > 1$.



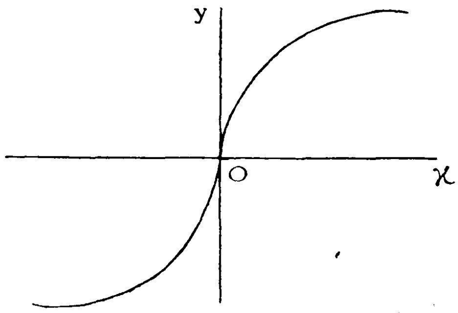
(Fig. 3) : $m = \dfrac{2h+1}{2k} < 1$.



(Fig. 4) : $m = \dfrac{2h+1}{2k} > 1$.



(Fig. 5) : $m = \dfrac{2h+1}{2k+1} < 1$.



(Fig. 6) . $m = \dfrac{2h+1}{2k+1} > 1$.

courbes que dans l'angle de coordonnées positives. On peut généraliser ce résultat à toutes les courbes $y = x^m$ en remarquant que x^m, lorsque m est un nombre irrationnel, est une « fonction bien définie » seulement pour les valeurs positives de x. Cela prouve que la topologie des paraboles interscendantes est bien différente de celle des paraboles algébriques, car celles-là, à différence de celles-ci, présentent à l'origine un *point d'arrêt*. Je crois que des phénomènes analogues, mais plus compliqués, se présenteront en d'autres courbes interscendantes, par exemple dans la courbe

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}}\left(ax^{\sqrt{2}} - \frac{1}{ax^{\sqrt{2}}}\right),$$

rappelée par M. Turrière et qui serait digne d'une étude détaillée au point de vue de la forme. On peut dire même en général que, si les courbes interscendantes ont été peu considérées, leur topologie est toute à faire...

G. Loria (Gênes).

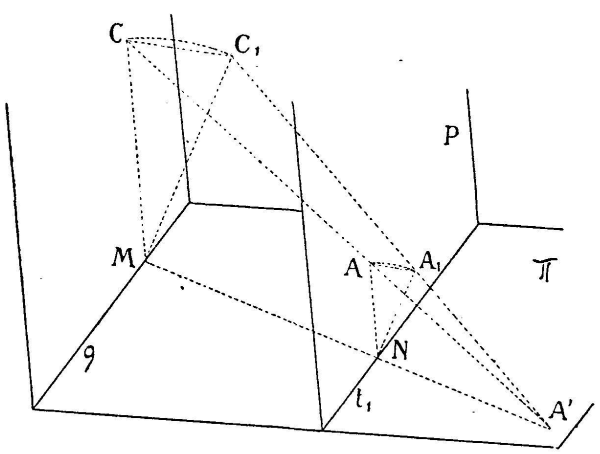
Une démonstration élémentaire du théorème fondamental de la collinéation centrale.

A propos d'un article de M. L. Crelier (Bienne).

Dans un article intitulé Les figures collinéaires (*L'Enseignement mathématique*, XIVe année, p. 121), M. Crelier publie un chapitre de géométrie élémentaire avec le but de présenter la collinéation centrale d'une manière élémentaire.Dans ce qui suit, j'exposerai une démonstration élémentaire du théorème fondamental de la collinéation centrale, que M. Crelier avait aussi touché.

Le théorème est le suivant :

Deux figures collinéaires restent collinéaires si l'on fait tourner d'un angle quelconque le plan de l'une autour de l'intersection des deux plans. Le centre tourne en même temps et en même sens du même angle autour du premier axe secondaire.



Soit (fig) le point A' du plan π comme projection centrale du point A situé dans le plan P, relativement au centre C. Faisons tourner P d'un angle φ autour de t_1 et en même temps et dans le