

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1912)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOUVEAU PROCÉDÉ POUR LE DÉVELOPPEMENT DES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES SIMPLES
Autor: Pasternak, Léon
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-14291>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

En faisant enfin

$$pa = x, \quad \frac{x}{a} = \mu$$

on a, pour tout x ,

$$(7) \quad S(x) = \sin(\mu x) \quad C(x) = \cos(\mu x).$$

Une vérification montre que cette forme des fonctions cherchées est non seulement nécessaire, mais encore que toute valeur de μ fournit une solution.

La méthode s'applique aussi à la fonction $\text{tg}(x)$.

H. SCHUEPP (Zurich).

(Traduction de M. F. LÉVY, Genève.)

NOUVEAU PROCÉDÉ
POUR LE
DÉVELOPPEMENT DES FRACTIONS DÉCIMALES
PÉRIODIQUES SIMPLES

I. — On sait qu'une fraction proprement dite $\frac{R_0}{N}$ à dénominateur N premier relativement à 10, fournit un développement décimal purement périodique. On l'obtient par division décimale de R_0 par N . Nous indiquons, dans ce qui suit, un procédé beaucoup plus simple, qui n'a pas été signalé jusqu'ici, bien qu'il soit élémentaire. Il s'appuie uniquement sur l'addition et la multiplication, il est donc, quant au degré des opérations utilisées, plus simple que le procédé habituel.

Nous supposons le dénominateur N de la forme $10m - 1$, ceci sans nuire à la généralité, car dans les 3 autres possibilités $10m + 1$, $10m + 3$, $10m - 3$, on peut passer à la forme choisie, en multipliant haut et bas par 9, 3 ou 7.

Les équations suivantes traduisent le procédé usité par division :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 10R_0 = N \cdot y_1 + R_1, \\ 10R_1 = N \cdot y_2 + R_2, \\ \dots \dots \dots \\ 10R_{k-1} = N \cdot y_k + R_k, \end{array} \right. \quad k = (1, 2, 3 \dots)$$

où $R_1, R_2 \dots$ sont les restes des divisions successives et $y_1 y_2 \dots$ les chiffres du développement cherché.

Avec ces équations on peut montrer, sous l'hypothèse faite, N premier relativement à 10, que le développement est purement périodique; et aussi que R_k est en même temps reste de la division $10^k R_0 : N$.

Si R_t est le premier reste égal à R_0 , t est la longueur de la période, dont les chiffres sont $y_1 y_2 \dots y_t$.

Décomposons R_k en la somme de ses dizaines et de ses unités :

$$R_k = 10z_k + e_k .$$

On déduit de (1), en faisant $N = 10m - 1$,

$$10R_{k-1} = (10m - 1)y_k + 10z_k + e_k = 10(my_k + z_k) + e_k - y_k .$$

Il en résulte que $e_k - y_k$ est divisible par 10, ce qui ne peut être que si

$$(3) \quad e_k = y_k , \quad \text{puisque} \quad e_k \text{ et } y_k \leq 9 .$$

D'où réduction de l'équation ci-dessus à

$$(4) \quad R_{k-1} = my_k + z_k , \quad \text{ou} \quad R_{k-1} = me_k + z_k .$$

On a donc le *théorème* : Si le dénominateur de la fraction $\frac{R_0}{N}$ a la forme $10m - 1$, la suite des chiffres de la période de son développement décimal est la même que celle des unités des restes successifs. En particulier, de $R_t = R_0$ résulte que le dernier chiffre de la période est le chiffre des unités du numérateur $R_0 = 10z_0 + e_0$. Pour le procédé habituel, cette propriété reste sans emploi, puisque les e_k se déduisent immédiatement après les y_k .

Mais la formule récurrente (4) permet de calculer en sens contraire la suite des restes, d'où se déduira la période renversée.

D'abord nous avons de $R_0 = R_t$ la valeur e_t . De (4) résulte e_{t-1} et ainsi de suite. Le calcul se termine sitôt qu'est obtenu un reste égal à R_0 .

La simplicité de ce procédé ressort des *exemples suivants* :

1° Développer $\frac{34}{39}$;

$$m = 4 \quad R_0 = R_t = 34 \quad e_t = 4 \quad z_t = 3 .$$

L'on peut disposer le calcul d'après le schéma suivant :

e_k	8	7	4	7	9	4
z_k	2	0	3	3	1	3
me_k	32	28	4	28	36	16
R_{k-1}	34	28	7	31	37	19

D'où $\frac{34}{39} = 0,\overline{871794}$.

2° Soit la fraction $\frac{2}{7}$. Pour donner au dénominateur la forme voulue, multiplier haut et bas par 7. Alors $m = 5$ et l'on obtient

$$\frac{2}{7} = \frac{14}{49} = 0,\overline{285714}$$
 .

Les opérations, effectuées de tête, sont

$R_0 = 14$	Chiffre 4
$5 \cdot 4 + 1 = 21$	» 1
$5 \cdot 1 + 2 = 7$	» 7
$5 \cdot 7 + 0 = 35$	» 5
$5 \cdot 5 + 3 = 28$	» 8
$5 \cdot 8 + 2 = 42$	» 2
$5 \cdot 2 + 4 = 14 = R_0$	

II. — Après avoir exposé très élémentairement le procédé, donnons encore une deuxième démonstration moins simple, mais qui fait apparaître la dépendance de la suite des restes de la forme du dénominateur, et enlève à la première démonstration ce que son début a d'arbitraire.

Lorsque

$$ab \equiv 1 \pmod{N} ,$$

où a et b sont relativement premiers à N , les nombres a et b appartiennent au même exposant t (EULER appelle a et b , nombres associés ; KRONECKER, diviseurs conjugués de l'unité). Ces nombres satisfont aux congruences :

$$a^s \equiv b^{t-s} \pmod{N}$$

c'est-à-dire que les puissances croissantes de a

$$a^0 a^1 a^2 \dots a^t$$

donnent les mêmes restes que les puissances décroissantes du nombre associé b ,

$$b^t b^{t-1} \dots b^1 b^0 .$$

La justesse de cette propriété, qui est parfois utile lors de la détermination de racines primitives, se vérifie en élevant à la puissance s , la congruence

$$ab \equiv 1 \pmod{N} .$$

D'où, après multiplication par b^{t-s} .

$$a^s \equiv b^{t-s} \pmod{N} .$$

Mais 10 et m sont associés d'après

$$10m \equiv 1 \pmod{N = 10m - 1} .$$

Donc les restes de

$$10^0, 10^1, 10^2, \dots, 10^t$$

sont identiques à ceux de

$$m^t, m^{t-1}, m^{t-2}, \dots, m^0 .$$

Par exemple, par suite de $10 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{39}$, les puissances

	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
restes :	1	10	22	25	16	4	1

et les puissances :

	4^0	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6
restes	1	4	16	25	22	10	1

donnent les mêmes restes en sens contraire.

De même, en général, les restes de

$$10^0 R_0, 10^1 R_0, 10^2 R_0, 10^k R_0, 10^{t-1} R_0, 10^t R_0$$

et de

$$m^0 R_0, m^1 R_0, m^2 R_0, m^k R_0, m^{t-1} R_0, m^t R_0$$

sont les mêmes, en ordre renversé.

Soit donc, $R_k = 10z_k + e_k$, le reste de $10^k R_0$, ou, d'après ce qui précède, de $m^{t-k} R_0$. Alors on a, pour le module, $N = 10m - 1$,

$$\begin{aligned} R_{k-1} &\equiv m^{t-k+1} R_0 \equiv m R_k \equiv m(10z_k + e_k) \\ &\equiv (10m - 1)z_k + (me_k + z_k) . \end{aligned}$$

D'où

$$R_{k-1} \equiv me_k + z_k \pmod{N} .$$

De $R_k < N$, ou $10z_k + e_k < 10m - 1$, résulte $z_k < m - 1$. En tenant compte, en plus, de $e_k \leq 9$, on a $me_k + z_k < 10m - 1$ et

$$R_{k-1} = me_k + z_k ,$$

ce qui est la formule récurrente, retrouvée à nouveau.

Le $k^{\text{ième}}$ chiffre de la période, se déduit comme nombre entier de $\frac{10R_{k-1}}{10m - 1}$ et comme

$$10R_{k-1} = 10(me_k + z_k) = (10m - 1)e_k + 10z_k + e_k$$

on voit de suite qu'il est justement e_k .

La première démonstration, plus immédiate de la formule récurrente, est due à mon fils P. PASTERNAK, ingénieur à Zurich.

Mai 1911.

LÉON PASTERNAK (Zurich).

(Traduction de M. F. LÉVY, Genève.)

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur l'axiome planaire de M. Peano.

Parmi les axiomes adoptés par M. PEANO pour le fondement de la Géométrie figure une proposition que l'on peut exprimer de la manière suivante :

A, B, C désignant trois points qui n'appartiennent pas à une même droite, D désignant un point du segment BC, et E un point du segment AD ; la droite BE contient un point F de la droite AC ; ce point appartient au segment AC, et le point E appartient au segment BF.

Je sépare, pour les distinguer, les trois propriétés ainsi postulées et dont la première seule est proprement projective, tandis que les deux autres sont visiblement des propriétés de *connexion*.

On sait qu'un second axiome planaire de M. PEANO a été signalé