

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1912)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES DYADS ET LES DYADICS DE GIBBS
Autor: Burali-Forti, C.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-14289>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LES DYADS ET LES DYADICS DE GIBBS

1. — Les disciples de HAMILTON et de GIBBS, dans leurs critiques¹ à nos travaux sur la théorie générale des vecteurs et des homographies vectorielles², soutiennent que le système qu'ils ont adopté (de HAMILTON ou de GIBBS) est *complet, parfait et digne d'être considéré comme système universel*. Or ces deux systèmes étant distincts et, encore plus, en contradiction entre eux, on doit donc conclure que les deux groupes de partisans ont tort tous les deux.

Le système originel des quaternions de HAMILTON (avec les symboles I , I^{-1}) est sans doute parfait pour sa généralité et sa précision ; mais il est incomplet³, car il ne peut donner que d'une manière tachygraphique et au moyen de vecteurs de référence, les homographies (qui ont 9 dimensions) et les dérivées par rapport à un point (à 9, 27... dimensions).

Il est inutile de parler des systèmes de pseudo-quaternions, dérivés du système de HAMILTON ; ils sont inexacts dans leur fondement ; ils font usage de notations illogiques ; ils ne peuvent pas amplifier le champ des vrais quaternions de HAMILTON.

Nous avons accepté le principe de GIBBS d'*indiquer avec un signe d'opération (et non de fonction)* le *produit intérieur et vectoriel*. Mais nous n'avons pas pu accepter les signes correspondants \cdot , \times , pour des raisons historiques et surtout parce que le *point* est signe

¹ *L'Enseignement mathématique*, XI^e année (1909), p. 46, 129-134, 211-217, 459-466 ; XII^e année (1910), p. 39-54 ; XIII^e année (1911), p. 138-148.

The unifications of vectorial notations by E.-B. WILSON in *Bull. of the American Math. Society*, 2^d series, v. XVI, n° 8, p. 415-436, New-York (1910) ; et un article de M. J.-B. SHAW in *Bulletin of the International Association for promoting the study of Quaternions and allied systems of Mathematics*, p. 26-27, October 1910.

² Nos notations et la bibliographie complète de nos travaux sont exposés dans notre livre : *Elementi di Calcolo vettoriale*, Bologna, Zanichelli, 1909 ; *Eléments de Calcul vectoriel*, traduit de l'italien par S. LATTÈS, Paris, Hermann, 1910.

On peut voir aussi : *Omografie vettoriali*, etc., Torino, Petrini, 1909. Les formules et les opérations qui se trouvent dans la première partie de cet ouvrage suffisent pour aborder la plus grande partie des questions géométriques, mécaniques et physiques auxquelles le calcul vectoriel minimum ne s'applique pas. C'est ce que nous avons prouvé dans la seconde partie de notre livre et dans plusieurs autres publications, dont nous donnerons prochainement la liste. Il s'agit de presque *quatre-vingt* travaux de MM. BURALI, BOGGIO, CISOTTI, COLONNETTI, GARBASSO, LAZZARINO, LEVI-CIVITA, MAGGI, MARCOLONGO, PALOMBY, SANTANGELO, VIVANTI.

³ *Eléments de calcul vectoriel*, p. 204.

de *séparation*; et si on lui donne d'autres significations, on peut faire naître des confusions. Nous avons adopté les signes \times , \wedge ; mais la forme du signe n'a pas d'importance, pourvu qu'elle soit *pratique* et soit *toujours* celle d'une opération. On pourra choisir à plaisir, même parmi les signes astronomiques!

Nous avons fait une longue critique du ∇ de GIBBS¹. Ce ∇ , avec des signes à droite ou à gauche, est un opérateur; puis il devient un *vecteur symbolique*; il finit naturellement par être un symbole inefficace, et bien différent du *nabla* de HAMILTON qui est un symbole parfait et puissant, mais *seulement pour les quaternions*.

Nous n'avons jamais parlé des *dyads* et des *dyadics* de GIBBS, qui forment la base de la théorie de la transformation linéaire des vecteurs en vecteurs.

Cette théorie de GIBBS, considérée comme une des premières tentatives, a eu certainement sa valeur; quoique nous croyons que les méthodes fonctionnelles parfaites de HAMILTON auraient dû faire suivre à GIBBS une autre route. Mais leur valeur réelle est presque nulle; et le lecteur pourra aisément se convaincre de ce que nous avançons par l'exposition suivante, très rapide, des choses fondamentales de la théorie des *dyads*².

2. — Soit: \mathbf{r} un vecteur, $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) deux *successions* de vecteurs. GIBBS considère le vecteur \mathbf{r}' , fonction linéaire de \mathbf{r} , au moyen des successions $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}' = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 \times \mathbf{r} + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{r} + \dots \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} \times \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots ; \end{array} \right.$$

ces deux formes³ dérivent de ce que l'on a écrit à droite ou à gauche du vecteur \mathbf{a}_i , le nombre $\mathbf{b}_i \times \mathbf{r} = \mathbf{r} \times \mathbf{b}_i$ qui le multiplie.

De ces formes *effectives*, GIBBS passe, tout court, aux formes *symboliques*

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}' = (\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 + \dots) \times \mathbf{r} \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} \times (\mathbf{b}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2 \mathbf{a}_2 + \dots) ; \end{array} \right.$$

¹ *L'Enseignement mathématique*, XIII^e année (1911), p. 143.

² Cette théorie a été l'objet de la dernière partie des *Elements of Vector-Analysis* dans les leçons de 1881-82, qui ont été imprimées dans *The Scientific Papers of J. WILLARD GIBBS*, New-York, 1906, v. II, p. 17-90. Mais ces recherches ne furent connues qu'après la publication de la *Vector Analysis* par M. WILSON (New-York, 1902; 2^e édition 1909) dont elle occupe les derniers chapitres. C'est encore la partie la moins connue de l'œuvre de GIBBS; les auteurs allemands qui en parlent se limitent en effet aux premières définitions et n'ont pas fait d'applications — qui sont peu nombreuses aussi dans la *Vector Analysis*. Nous parlerons plus loin du livre de M. JAUMANN.

³ Aux symboles d'opérations \times de GIBBS nous substituons nos symboles \times , \wedge . Dans (1) les points sont des séparateurs; ainsi $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 \times \mathbf{r}$ est la même chose que $\mathbf{a}_1(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{r})$, c'est-à-dire le produit du vecteur \mathbf{a}_1 par le nombre $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{r}$.

et avec les positions

$$\Phi = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 + \dots, \quad \Psi = \Phi_c = \mathbf{b}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2 \mathbf{a}_2 + \dots,$$

il donne aux (1) les formes

$$(1'') \quad \mathbf{r}' = \Phi \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} \times \Phi_c,$$

GIBBS ne manque pas de donner un *nom* aux formes considérées : Φ est une *dyadic*; Φ_c est la *dyadic conjuguée* de Φ ; les parties $\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i$ ou $\mathbf{b}_i \mathbf{a}_i$ sont des *dyads*.

Mais il ne donne pas une définition formelle, logiquement précise et absolue de la *dyad* et des *dyadics* et le passage *arbitraire* de la forme effective (1) à la forme symbolique (1') ou (1'') CONSTITUE LA SEULE DÉFINITION des *dyad* et des *dyadics*. Quelle différence avec la précision de Hamilton !

Si l'on fait usage de notre¹ symbole H les relations (1) prennent la forme unique

$$(2) \quad \mathbf{r}' = \{ H(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1) + H(\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2) + \dots \} \mathbf{r}.$$

et il paraît alors que la correspondance entre la notation de GIBBS et notre H soit exprimée par la formule

$$(2) \quad (\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 + \dots) \times = H(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1) + H(\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2) + \dots$$

ou bien, pour un seul terme,

$$(3) \quad (\mathbf{a} \mathbf{b}) \times = H(\mathbf{b}, \mathbf{a}).^2$$

Mais GIBBS dit encore (p. 272) : « *On the other hand the product ab is neither vector nor scalar — it is purely symbolic and acquires a determinate physical meaning only when used as operator.* » Alors il paraît qu'au lieu de (3) on doit avoir

$$(4) \quad \mathbf{a} \mathbf{b} = H(\mathbf{b} \mathbf{a}).$$

Il n'est pas possible d'imaginer une plus grande confusion. Le \mathbf{ab} que GIBBS appelle *indeterminate product* est en réalité une entité *indéterminée* !

3. — Dans les formules suivantes, le premier membre donne la

¹ *Omografie vettoriali*, p. 20. $H(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est l'homographie telle que si \mathbf{x} est un vecteur arbitraire on a

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{x} = \mathbf{u} \times \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}.$$

² Nous ne pouvons pas traduire la 2^e forme (1), car nous considérons seulement les opérateurs à gauche. Et nous n'avons pas besoin, comme GIBBS, des opérateurs à droite, puisqu'on a [*Omogr. vett.*, p. 20]

$$K H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = H(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

notation de produit simple ou double des dyads et des vecteurs ; le second est la définition du premier, suivant GIBBS ; et le troisième établit la correspondance, d'après (4), entre le second membre et notre H.

$$(5) \quad (\mathbf{ab}) \times (\mathbf{cd}) = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{ad} = H(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \cdot H(\mathbf{d}, \mathbf{c})$$

$$(6) \quad (\mathbf{ab}) \wedge \mathbf{r} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{r}) = - H(\mathbf{r}, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \wedge$$

$$(7) \quad \mathbf{ab} \begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \mathbf{cd} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{d} = \frac{\mathbf{d} \times \{H(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \cdot H(\mathbf{b}, \mathbf{a})\} \mathbf{d}}{\mathbf{d}^2}$$

$$(8) \quad \mathbf{ab} \begin{array}{c} \wedge \\ \wedge \end{array} \mathbf{cd} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c})(\mathbf{b} \wedge \mathbf{d}) = - \mathbf{a} \wedge \cdot H(\mathbf{d}, \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} \wedge .$$

La relation (5) dit que le produit intérieur de *deux dyads* n'est que leur *produit fonctionnel*. Après l'usage magistral qu'Hamilton a fait du produit fonctionnel, le produit intérieur de deux dyads (ou de deux dyadiques) n'a plus de raison à être considéré.

Les derniers membres de (6), (7) ... (9) démontrent l'inutilité des premiers, dès que l'on a introduit l'homographie $H(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, si naturelle et si logique ; et ils démontrent aussi leur inutile complication, indépendamment de H.

4. — La définition des trois membres des formules suivantes est analogue à celle des formules (5) ... (8) suivant GIBBS ; Φ_s et Φ_Λ sont respectivement le *scalaire* et le *vecteur* de Φ ; Φ_2 est le *second* de Φ .

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_s = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 + \dots = I_1 \Phi \\ \Phi_\Lambda = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1 + \dots = - 2V\Phi \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \Phi_2 = \frac{1}{2} \Phi \begin{array}{c} \wedge \\ \wedge \end{array} \Phi = R\Phi \quad ^1$$

$$(11) \quad (\Phi_2)_3 = I_2 \Phi$$

$$(12) \quad \Phi_3 = \frac{1}{3} \Phi \begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \Phi = I_3 \Phi .$$

Scalaire signifie *nombre* ; pourquoi alors appeler scalaire de Φ seulement Φ_s ; $(\Phi_2)_s$ et Φ_3 ne sont-ils pas aussi des nombres ? A nos notations uniformes, qui ont une définition très simple et que nous introduisons dès le début de la théorie :

$$I_1 \Phi, \quad I_2 \Phi, \quad I_3 \Phi$$

¹ Pour cet opérateur R, voir : *Omogr. vett.*, p. 24.
Il faut aussi se rappeler que

$$I_1 R\alpha = I_2 \alpha .$$

[Ibidem, p. 25, form. [6]].

correspondent les notations de GIBBS :

$$\Phi_S, \quad (\Phi_2)_S, \quad \Phi_3;$$

elles ne sont pas uniformes, et, ce qui est plus important, elles ont une définition très compliquée. Il faut encore observer l'*analogie* des deux notations Φ_2 , Φ_3 malgré leur grande diversité !

La Φ_2 correspond à l'opérateur R que nous avons défini d'une manière très simple, absolue et qui nous a été d'une grande utilité dans les applications.

5. — Suivant nos notations, nous avons identiquement

$$\alpha = H(\mathbf{i}, \alpha\mathbf{i}) + H(\mathbf{j}, \alpha\mathbf{j}) + H(\mathbf{k}, \alpha\mathbf{k})$$

$$K\alpha = H(\alpha\mathbf{i}, \mathbf{i}) + H(\alpha\mathbf{j}, \mathbf{j}) + H(\alpha\mathbf{k}, \mathbf{k});$$

α est une homographie, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ est un *système orthogonal dextrorsum*.

GIBBS arrive aussi à une forme semblable pour une homographie générale au moyen de *trois dyads*; ainsi pour GIBBS toute homographie dépend de neuf vecteurs, dont trois sont fixes; tandis que pour nous une homographie est indépendante de tout vecteur de référence.

Nous réduisons une homographie à la somme de sa *dilatation* et d'une *homographie axiale*, qui sont d'un usage continual dans les applications. Les mêmes éléments figurent aussi dans GIBBS (*self-conjugate*; *anti-self-conjugate dyadic*), mais sous une forme si compliquée que leur usage dans la pratique est impossible. Et c'est pour cela que ces éléments constitutifs et essentiels d'une homographie ne jouent pas un rôle bien important dans le livre de GIBBS.

6. — En résumé, les notations de GIBBS sont en contradiction avec les lois fonctionnelles, claires, simples et fécondes de HAMILTON; et les parties utiles et pratiques de sa théorie des transformations linéaires restent cachées sous un symbolisme incommodé et incorrect.

Ces défauts arrivent à un maximum dans l'ouvrage de M. JAUMANN¹. Il ne paraît pas que M. JAUMANN ait une idée bien claire du signe, $=$, d'égalité; car pour exprimer que deux vecteurs, deux dyads, etc., sont égaux, il croit bon de superposer au signe $=$ les nombres 3, 5, 9, ... 27. Par cela il veut signifier que l'équation vectorielle considérée peut être substituée par 3, 5, 9, ... 27 équations algébriques entre les coordonnées; il fait donc aussi de la tachygraphie cartésienne et non pas du calcul vectoriel.

¹ Die Grundlagen der Bewegungslehre von einem modernen Standpunkte aus, Leipzig, Barth, 1905.

La notation \mathbf{ab} de GIBBS pour une dyad pouvant se confondre avec celle du bivecteur de GRASSMANN, M. JAUMANN doit s'éloigner des notations de GIBBS ; et il écrit \mathbf{a}, \mathbf{b} pour la dyad. Ainsi la *virgule* a acquis le caractère d'un signe d'opération, ce qui n'est certainement pas convenable.

Mais M. JAUMANN trouve aussi nécessaire de considérer deux dyads ; la dyad *scalaire* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, qui est celle de GIBBS et la *dyad de rotation* $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Ne considérons pas le peu de précision des définitions et des notations de M. JAUMANN ; observons seulement que $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ correspond à notre opérateur vectoriel $\mathbf{a} \wedge \cdot \mathbf{b} \wedge$; c'est-à-dire au produit des deux *homographies axiales* $\mathbf{b} \wedge, \mathbf{a} \wedge$. Mais il est facile de vérifier que

$$\mathbf{a} \wedge \cdot \mathbf{b} \wedge = H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

n'est pas une rotation et, par conséquent, la dénomination de M. JAUMANN est inexacte ; d'un autre côté $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ est un opérateur qui dépend d'autres opérateurs plus simples au moyen d'opérations fonctionnelles bien définies ; il ne doit donc être pris comme opérateur primitif !

Le ∇ de GIBBS est pour M. JAUMANN une bonne source de nouveaux tachygraphes cartésiens. Pour bien voir leur inopportunité, même comme tachygraphes, il suffit de les confronter avec les formes qu'ils prennent avec notre opérateur *absolu* et bien défini $\frac{d}{dP}$. La *dérivation scalaire* et sa conjuguée, que M. JAUMANN écrit avec les notations symboliques

$$\mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \nabla) \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \nabla = \nabla_b \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

correspondent à nos notations *simples* et *absolues* et qui ont une *signification fonctionnelle très précise*¹ :

$$\frac{d\mathbf{b}}{dP} \mathbf{a}, \quad K \frac{d\mathbf{b}}{dP} \mathbf{a}.$$

La *dérivation de rotation* et sa conjuguée sont exprimées par M. JAUMANN par

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \wedge \nabla, \quad (\mathbf{a} \wedge \nabla) \wedge \mathbf{b}$$

¹ Les auteurs allemands font usage de la notation $(\mathbf{a} \text{ grad}) \mathbf{b}$ [*Omogr. vett.*, p. 51]. Cette notation a beaucoup de défauts. Le vecteur qu'elle représente n'a rien à voir avec gradient.

Il paraît que ce vecteur est obtenu en appliquant à \mathbf{b} un opérateur fonction de \mathbf{a} ; tandis que c'est le contraire qui a lieu ; c'est-à-dire que ce vecteur s'obtient en appliquant à \mathbf{a} un opérateur fonction de \mathbf{b} .

Voilà les erreurs logiques qui dérivent de la formation, par simple analogie, de tachygraphes cartésiens.

($\mathbf{a} \wedge \mathbf{v}$ est un nouvel *opérateur symbolique!*) ; elles correspondent, avec nos notations, aux

$$-\operatorname{div} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \frac{d\mathbf{b}}{dP} \mathbf{a}, \quad -\operatorname{div} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + K \frac{d\mathbf{b}}{dP} \mathbf{a}.$$

Il est bien entendu que M. JAUMANN obtient tout cela avec les coordonnées et ensuite ses opérateurs symboliques font ressembler ses formules à de véritables hiéroglyphes égyptiens. Il n'y a rien d'absolu et de concret dans ces opérateurs ; rien qui soit pratique et qui réponde aux idées logiques précises de l'œuvre magistrale de HAMILTON.

Ces opérateurs symboliques, semblables à ceux dont GIBBS et ses élèves font un si large usage, sont donc inutiles et ils ont beaucoup retardé le développement logique du calcul vectoriel. Nous espérons l'avoir démontré, d'après ce que nous avons dit.

C. BURALI-FORTI (Turin) et R. MARCOLONGO (Naples).

DÉFINITION DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES PAR LEUR THÉORÈME D'ADDITION

M. Osgood, dans son livre sur la Théorie des fonctions¹, démontre que toutes les fonctions, possédant un théorème d'addition analogue à celui du sin, et cos, sont, au fond, identiques à ces fonctions. La démonstration d'Osgood n'est pas très simple et conduit finalement à l'équation différentielle $y'' + y = 0$. La démonstration peut être simplifiée et comme l'exposé suivant ne suppose rien de l'analyse supérieure, cette détermination des fonctions trigonométriques par une équation fonctionnelle pourrait être accessible à l'enseignement secondaire (dans un exposé un peu serré).

Osgood établit d'une façon élémentaire, au début de son exposé, que la continuité en un point entraîne la continuité en tout point. Nous ferons donc à priori les hypothèses suivantes, qui n'impliquent aucune restriction.

¹ *Lehrbuch der Funktionentheorie*, tome I, page 510 et suivantes.