

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 14 (1912)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LA GÉNÉRATION DES COURBES UNICURSALES  
**Autor:** Tweedie, Ch.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-14288>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LA GÉNÉRATION DES COURBES UNICURSALES

---

1. — La théorie des courbes unicursales entre presque au début dans le champ d'étude du mathématicien. La ligne droite et les coniques fournissent des exemples courants de ces courbes.

Plusieurs des transformations géométriques les plus usuelles, par exemple celles qui donnent les courbes inverses, les podaires, les développées transforment les courbes unicursales en courbes unicursales. Il serait par conséquent utile d'avoir un exposé de leurs propriétés qui non seulement ne dépende pas de la théorie générale des courbes planes, mais qui au contraire soit une introduction à cette théorie. C'est le but que je me propose dans cette Note en traitant le problème par une méthode qui admet une généralisation facile aux courbes unicursales de l'espace à trois dimensions ou à plus de trois dimensions.

L'étude des courbes planes du troisième et du quatrième degré suffit à mettre en évidence les points principaux de la théorie. Au détriment de la perfection logique j'emploie des coordonnées non homogènes et je suppose la courbe donnée par des équations de la forme

$$x = \frac{f_1(t)}{f_3(t)}, \quad y = \frac{f_2(t)}{f_3(t)} \quad (I)$$

où  $f_k(t) = a_k t^n + b_k t^{n-1} + \dots + l_k$ ;  $t$  est un paramètre variable; les différentes fonctions  $f$  n'ont pas de facteur commun.

Cette courbe rencontrera la droite

$$Ax + By + C = 0$$

aux  $n$  points pour lesquels  $t$  satisfait à l'équation

$$Af_1(t) + Bf_2(t) + Cf_3(t) = 0.$$

La courbe unicurrale est donc généralement du  $n^{\text{ième}}$  degré. Les cas faisant exception sont traités dans les paragraphes suivants.

2. — **La droite.** — La droite est représentée par les équations

$$x = \frac{a_1 t + b_1}{a_3 t + b_3}, \quad y = \frac{a_2 t + b_2}{a_3 t + b_3}.$$

BRILL avait remarqué (*Math. Annalen*, vol. 12) que lorsqu'on suppose  $n = 2$  dans les équations (I) et que l'on considère le cas de la conique dégénérée, elle se décompose en une droite tracée deux fois. On peut généraliser ceci et chercher dans quels cas les équations (I) représenteront une droite.

Supposons la droite exprimée en coordonnées rectangulaires  $x, y$  par

$$Ax + By + C = 0 .$$

Nous aurons alors l'identité suivante pour  $t$

$$Af_1(t) + Bf_2(t) + Cf_3(t) \equiv 0 ,$$

d'où la valeur nulle des déterminants formés avec les éléments

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ a_3 & b_3 & \dots & l_3 \end{vmatrix} . \quad (1)$$

La réciproque est vraie ; de sorte que les conditions sont nécessaires et suffisantes.

Dans cette représentation à chaque point sur la ligne correspondent  $n$  valeurs de  $t$ , et la courbe (dégénérée) consiste en une ligne droite tracée  $n$  fois.

3. — Il est facile de se rendre compte qu'une courbe représentée par les équations (I) ne peut pas dégénérer en deux courbes algébriques distinctes,

$$\Phi(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \Psi(x, y) = 0 .$$

En effet, ces équations devraient alors pouvoir se déduire de (I) par élimination algébrique de  $t$ , ce qui nécessiterait qu'elles soient séparément vraies pour une infinité de valeurs communes de  $t$ , c'est-à-dire qu'elles possèdent une infinité de points communs ; hypothèse qui n'est possible que pour des courbes  $\Phi = 0$  et  $\Psi = 0$  non distinctes.

Par conséquent la courbe, lorsqu'elle est dégénérée, est du  $m^{\text{ième}}$  degré,  $m$  étant un facteur de  $n$ , et cette courbe est unique.

Dans ce qui suit nous supposerons que les équations (I) représentent une courbe proprement dite du  $n^{\text{ième}}$  degré.

4. — **Coniques.** — Si nous posons

$$f_k(t) = a_k t^2 + b_k t + c_k , \quad (2)$$

peut-on avoir l'identité en  $t$

$$\Sigma(p_k t + q_k) f_k(t) \equiv 0 ? \quad (3)$$

La condition de possibilité se traduit par quatre relations linéaires homogènes entre les six quantités

$$(p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3) .$$

L'identité est par conséquent possible, et si

$$(p_1, q_1 \dots), \quad (p'_1, q'_1 \dots)$$

sont deux systèmes de solutions, les autres systèmes sont déterminés par des combinaisons linéaires de ces deux.

Nous sommes ainsi conduits à deux identités

$$L + tM = 0, \quad L' + tM' = 0 \quad (4)$$

où

$$L = q_1x + q_2y + q_3$$

$$M = p_1x + p_2y + p_3 ; \quad \text{etc.}$$

(L'équation en  $x, y$  de la conique est donc  $LM' - L'M = 0$ ).

Il s'ensuit immédiatement la propriété projective de la conique comme lieu de l'intersection des rayons correspondants de deux faisceaux projectifs de droites. Le paramètre  $t$  a également une interprétation géométrique.

On pourrait aussi remplacer les deux systèmes de solutions

$$(p_1, \dots) \quad \text{et} \quad (p'_1, \dots)$$

par deux de leurs combinaisons linéaires ; mais les faisceaux ainsi obtenus seraient les mêmes et cela ne donnerait lieu à aucun résultat nouveau.

5. — **Cubiques.** — Nous prenons ici

$$f_k(t) = a_k t^3 + \dots + d_k . \quad (5)$$

Dans ce cas la supposition

$$\Sigma (p_k t + q_k) f_k(t) \equiv 0 \quad (6)$$

détermine cinq relations homogènes entre les six quantités

$$p_1, \dots, q_3 ;$$

leurs rapports admettent alors une seule solution indépendante.

Il existe par conséquent une relation

$$L + tM = 0 \quad (7)$$

dans laquelle

$$L = q_1 x + q_2 y + q_3 ,$$

$$M = p_1 x + p_2 y + p_3 .$$

L'hypothèse

$$\Sigma (p_k t^2 + q_k t + r_k) f_k(t) \equiv 0$$

déterminerait six équations entre les neuf quantités

$$p_1, \dots, r_3 .$$

Il y a par conséquent trois systèmes de solutions indépendants et les autres systèmes de solutions en sont des combinaisons linéaires. Nous pouvons prendre pour deux de ces systèmes les valeurs

$$o, p_1, q_1 ; \quad o, p_2, q_2 ; \quad \text{etc.}$$

et

$$p_1, q_1, o ; \quad p_2, q_2, o ; \quad \text{etc.}$$

données par

$$L + tM = 0 \quad \text{et} \quad Lt + Mt^2 = 0 .$$

Supposons que  $p'_1, q'_1, r'_1$ , etc. ; soit un troisième système de solutions auquel correspond l'identité

$$L' + M't + N't^2 = 0 , \tag{8}$$

dans laquelle

$$L' = r'_1 x + r'_2 y + r'_3 ; \quad \text{etc.}$$

Comme (8) représente une tangente à la section conique

$$M'^2 - 4L'N' = 0 ,$$

nous en tirons la conclusion :

La cubique peut être envisagée comme la courbe engendrée par le point commun à

$$L + tM = 0 , \tag{9}$$

$$L' + M't + N't^2 = 0 . \tag{10}$$

Enfin le théorème :

*La cubique unicursale peut être considérée comme le lieu de l'intersection des rayons d'un faisceau avec les tangentes à une conique.*

Ou encore :

*Etant données deux séries ponctuelles et un faisceau de droites en correspondance projective; la droite joignant les points correspondants des deux séries coupe le rayon correspondant du faisceau en un point dont le lieu est une cubique unicursale.*

6. — Le point double correspond à

$$L = 0, \quad M = 0,$$

autrement l'équation

$$L + tM = 0$$

ne serait pas satisfaite pour deux valeurs de  $t$ , condition nécessaire pour le point double.

Le point double est donc le sommet du faisceau de droites déterminé par (9).

L'équation de la cubique, en  $x$  et  $y$ , s'obtient par l'élimination de  $t$  entre (9) et (10).

Aux deux tangentes à la conique enveloppée par (10) correspondent les droites du faisceau tangentes à la cubique passant par le point double. Ainsi le point double à deux branches réelles, est un rebroussement, ou un point conjugué, selon qu'il est pris extérieurement à la conique, sur la conique ou intérieurement à la conique.

7. — Lorsque la conique enveloppée par (10) rencontre la cubique, elle lui est tangente. Elle a donc généralement trois points de contact avec la cubique.

La propriété du contact peut se prouver analytiquement comme suit.

Supposons une courbe engendrée par un point satisfaisant aux équations

$$\Phi(t) \equiv Ax + By + C = 0 \quad (11)$$

$$\Psi(t) \equiv A'x + B'y + C' = 0 \quad (12)$$

dans lesquelles les coefficients sont fonctions d'un paramètre  $t$  dont la variation détermine la courbe.

Soit  $P$  un point quelconque  $(x_0, y_0)$  sur la courbe correspondant à  $t = t_0$  et représentée par  $\Phi = 0, \Psi = 0$ .

La tangente en  $P$  à la courbe est en général donnée par

$$\begin{vmatrix} \Phi & \Psi \\ \Phi'_0 & \Psi'_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

où  $\Phi'_0$  est la valeur de  $\frac{d\Phi}{dt}$  pour  $x = x_0, y = y_0, t = t_0$ .

L'enveloppe de  $\Phi = 0$  s'obtient en éliminant  $t$  entre

$$\Phi = 0 \quad \text{et} \quad \Phi' = 0.$$

Pour un point commun à la courbe et à l'enveloppe de (11) l'équation (13) se réduit à  $\Phi = 0$ ; les deux courbes ont par consé-

quent une tangente commune. La même propriété reste vraie pour tous les points communs à la courbe et à l'enveloppe de (12).

### 8. — Les autres solutions de l'équation

$$\Sigma(p_k t^2 + q_k t + r_k) f_k(t) \equiv 0$$

donnent

$$L + tM = 0$$

$$L' + M't + N't^2 + (At + B)(L + tM) = 0$$

où A et B sont des constantes arbitraires. On peut conserver le même faisceau et remplacer la conique enveloppe par une infinité d'autres coniques<sup>1</sup>.

### 9. — Quartiques. — Supposons

$$f_k = a_k t^4 + \dots + e_k ,$$

l'identité

$$\Sigma(p_k t + q_k) f_k(t) \equiv 0$$

est alors généralement impossible. Nous reprendrons ce cas plus loin.

Si nous supposons

$$\Sigma(p_k t^2 + q_k t + r_k) f_k(t) \equiv 0$$

des sept équations, entre les neuf quantités qui en résultent, nous déduisons deux relations de la forme

$$t^2 L + 2tM + N = 0 \quad (14)$$

$$t^2 L' + 2tM' + N' = 0 . \quad (15)$$

Toute autre relation peut être réduite à la suivante

$$t^2(L + AL') + 2t(M + AM') + N + AN' = 0 ; \quad (16)$$

où A est une constante.

<sup>1</sup> Il est facile de démontrer que si les points de la cubique correspondant aux valeurs  $t_1, t_2; t_3$  sont en ligne droite, alors il existe une relation

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv At_1 t_2 t_3 + B\Sigma t_1 t_2 + C\Sigma t_1 + D = 0$$

dans laquelle A, B, C, D sont des constantes.

Si  $t = t_1$  est un point d'inflexion, c'est une racine de

$$At^3 + 3Bt^2 + 3Ct + D = 0 \quad (X)$$

Il y a donc trois inflexions et si  $i_1, i_2, i_3$  sont les racines de (X), alors  $F(i_1, i_2, i_3) = 0$ , de sorte que les trois inflexions sont sur une même droite.

(Deux équations de cette forme peuvent naturellement être substituées aux équations (14) et (15).)

Or les deux équations (14) et (15) représentent des tangentes aux coniques

$$M^2 - LN = 0 ; \quad M'^2 - L'N' = 0 .$$

On peut donc énoncer le *théorème suivant* :

*Une courbe unicurrale du quatrième ordre peut généralement être engendrée par l'intersection des tangentes à deux coniques qui sont en relation homographique l'une avec l'autre.*

Ou encore : *Etant données quatre séries homographiques de points, la droite réunissant deux points correspondants de deux des séries coupe la ligne droite correspondante, joignant des points des deux autres séries, en un point dont le lieu est une courbe unicurrale du quatrième ordre.*

10. — **Points doubles.** — Pour un point ordinaire  $(x, y)$  de la courbe, les équations (14) et (15) admettent une racine commune en  $t$ ; pour un point double les deux racines en  $t$  sont communes. D'où, pour un point double, les relations

$$\frac{L}{L'} = \frac{M}{M'} = \frac{N}{N'} .$$

Si nous représentons le rapport commun par  $\varrho$ , l'élimination de  $x$  et  $y$  conduit à une cubique en  $\varrho$ . Il y a par conséquent, en général, trois points doubles.

L'équation ordinaire de la courbe du quatrième ordre en fonction de  $x$  et  $y$  s'obtient par l'élimination de  $t$  entre les équations (14) et (15), soit

$$4(MN' - M'N)(LM' - L'M) = (NL' - N'L)^2$$

ou encore

$$C_1 C_2 = C_3^2$$

où  $C_1, C_2, C_3$  sont trois coniques passant par trois points communs (les points doubles de la courbe du quatrième ordre).

Nous arrivons ainsi à une autre génération connue de la courbe, c'est-à-dire comme intersection de

$$C_1 - \lambda C_3 = 0 , \quad \text{et} \quad \lambda C_2 - C_3 = 0 ,$$

où  $\lambda$  est arbitraire.

11. — Nous savons par le § 7 que chaque conique

$$M^2 - LN = 0 , \quad M'^2 - L'N' = 0$$

coupe la courbe du quatrième ordre en quatre points. Nous trouvons de plus ici la propriété suivante.

Les tangentes génératrices (14) et (15) peuvent être remplacées par deux autres du système (16) dont la conique enveloppe est donnée par

$$(M + AM')^2 - (L + AL')(N + AN') = 0$$

c'est-à-dire

$$M^2 - LN + A(2MM' - LN' - L'N) + A^2(M'^2 - L'N') = 0 \quad (18)$$

La variation de A dans (18) détermine un système de coniques dont l'enveloppe est la courbe du quatrième ordre elle-même.

## 12. — Revenons au cas

$$\Sigma(p_k t + q_k)f_k \equiv 0. \quad (17)$$

Cette identité n'est pas possible, en général, et la condition de possibilité s'exprime par l'équation

$$\left| \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1 & e_2 & e_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \right| = 0.$$

Il existe deux solutions pour

$$\Sigma(p_k t^2 + q_k t + r_k)f_k = 0$$

correspondant à l'identité (17) multipliée par At + B et qui n'en sont pas indépendantes.

Il y a quatre solutions linéairement indépendantes relatives à

$$\Sigma(p_k t^3 + \dots)f_k \equiv 0.$$

Trois de celles-ci sont données par l'identité (17) multipliée par

$$At^2 + Bt + C.$$

La quatrième est une identité distincte,

$$L't^3 + M't^2 + N't + P' = 0.$$

Nous avons ainsi comme génératrices les équations

$$\left. \begin{aligned} Lt + M &= 0 \\ L't^3 + M't^2 + N't + P' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

L'élimination de  $t$  entre elles détermine une courbe du quatrième ordre ayant un point triple au sommet du faisceau de lignes et donné par

$$L = 0 ; \quad M = 0 .$$

13. — Nous pouvons maintenant énoncer les propriétés concernant les courbes d'ordres supérieurs et cela sans nouvelle démonstration, les développements qui y conduisent étant suffisamment illustrés par ce qui précède.

**THÉORÈME.** — *Une courbe unicurrale C de degré n, peut être engendrée par l'intersection des tangentes correspondantes à deux courbes unicursales  $C_1$  et  $C_2$  dont la somme des classes est n.*

Le cas normal pour  $n = 2m$  est celui où chaque enveloppe génératrice est de classe  $m$ ; et pour  $n = 2m + 1$  où une des courbes enveloppes est de classe  $m$  et l'autre de classe  $m + 1$ .

Ce n'est que dans des cas exceptionnels que les classes seront respectivement  $m - a$  et  $m + a$  ou  $m - a$  et  $m + 1 + a$ . Les courbes enveloppes sont dans tous les cas unicursales et on peut également leur appliquer le même mode de génération.

Un point de rencontre quelconque de C avec  $C_1$  (ou  $C_2$ ) est généralement un point de contact.

14. — **Espace à trois dimensions.** — Les mêmes méthodes s'appliquent aux courbes unicursales dans l'espace à trois dimensions, courbes pour lesquelles les coordonnées  $(x, y, z)$  d'un point quelconque s'expriment en fonction rationnelle d'un paramètre  $t$ ,

$$x = \frac{f_1(t)}{f_4(t)}, \quad y = \frac{f_2(t)}{f_4(t)}, \quad z = \frac{f_3(t)}{f_4(t)} .$$

La courbe est du  $n^{\text{me}}$  degré lorsque les fonctions  $f$  sont du  $n^{\text{me}}$  degré.

Pour une courbe du second degré on a l'identité

$$Ax + By + Cz + D = 0 . \quad (20)$$

La courbe est alors plane, c'est une section conique.

Pour une courbe du troisième degré, il y a trois relations

$$\left. \begin{array}{l} L_1 + tM_1 = 0, \\ L_2 + tM_2 = 0, \\ L_3 + tM_3 = 0, \end{array} \right\} \quad (21)$$

correspondant à une génération projective bien connue de la cubique gauche comme intersection de trois plans.

et une troisième relation indépendante

$$L_3 + tM_3 + t^2N_3 = 0 . \quad (23)$$

Pour la courbe du quatrième ordre nous avons deux relations

$$L_1 + tM_1 = 0 , \quad L_2 + tM_2 = 0 \quad (22)$$

L'élimination de  $t$  détermine la courbe comme intersection partielle d'une surface quadrique et d'une surface cubique avec une ligne double tracée sur la dernière, et qui est aussi une génératrice de la quadrique<sup>1</sup>.

**THÉORÈME.** — *La courbe unicursale du n<sup>me</sup> degré peut être considérée comme engendrée par l'intersection des plans tangents à 3 surfaces développables pour lesquelles la somme des classes est n :*

$$\left. \begin{array}{l} L_1 t^a + M_1 t^{a-1} + \dots = 0 , \\ L_2 t^b + M_2 t^{b-1} + \dots = 0 , \\ L_3 t^c + M_3 t^{c-1} + \dots = 0 , \end{array} \right\} \text{avec } a + b + c = n .$$

Lorsque  $n = 3m$  la classe de chaque surface sera ordinairement  $m$ ; quand  $n = 3m + 1$  elle sera respectivement  $m, m, m + 1$  enfin elle sera  $m, m + 1, m + 1$  lorsque  $n = 3m + 2$ .

**15. — Espace à n dimensions.** — Nous pouvons énoncer les théorèmes suivants.

I. *Une courbe unicursale de degré m, m étant inférieur à n, appartient à un espace ayant au plus m dimensions.*

II. *Une courbe de degré n qui n'est pas contenue dans un espace inférieur est nécessairement unicursale.*

On peut la considérer comme engendrée par le point commun à

$$L_1 + tM_1 = 0$$

$$L_2 + tM_2 = 0$$

... . . . . .

$$L_n + tM_n = 0$$

<sup>1</sup> Le lecteur peut vérifier l'affirmation suivante :

Il y a deux sortes de courbes unicursales du quatrième ordre. La première a un point multiple et est l'intersection complète de deux quadriques qui sont tangentes en un point de contact.

La seconde variété ne peut être que sur une seule quadrique et n'a pas de point multiple.

S'il y a un point multiple ( $x, y, z$ ), les équations (22) doivent être compatibles par rapport à ( $x, y, z$ ) pour deux valeurs de  $t$ . Par conséquent

$$L_1 = 0 , \quad M_1 = 0 ; \quad L_2 = 0 , \quad M_2 = 0$$

et la quadrique

$$L_1 M_2 - L_2 M_1 = 0$$

est un cône.

III. Une courbe de degré  $n + 1$ , si elle est unicurale, peut généralement être représentée, avec un choix convenable de coordonnées homogènes, par les équations

$$\rho x_1 = (t - a_1)^{n+1}$$

$$\rho x_2 = (t - a_2)^{n+1}$$

.....

$$\rho x_{n+1} = (t - a_{n+1})^{n+1}$$

IV. Une courbe unicurale du  $m^{\text{me}}$  degré peut être considérée comme engendrée par les  $n$  équations.

$$f_a(x_1, x_2, x_3 \dots t) = 0$$

$$f_b(x_1, x_2, x_3 \dots t) = 0$$

etc.

dans lesquelles les  $n$  fonctions  $f$  sont des fonctions linéaires des coordonnées et sont de degrés  $a, b, c, \dots$  en  $t$ , tels que  $a + b + \dots = m$

Ch. TWEEDIE (Edimbourg).

Traduction de Mlle R. MASSON (Genève).