Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1912)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOUVELLE NOTE SUR LES FONCTIONS DE MESURE
Autor: Combebiac, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14287

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

NOUVELLE NOTE SUR LES FONCTIONS DE MESURE

Dans ma dernière Note sur les fonctions de mesure, j'indiquais que la proposition 5 de ma Note précédente (*Ens. math.*, 1911, p. 388) n'impliquait nullement que $\Phi(u, v)$ fût une fonction croissante ou continue de sa première variable.

Voici une démonstration qui met nettement en évidence cette indépendance.

On continuera à admettre que l'on a toujours : $\Phi(u, v) > u$ et que v est, en vertu de l'égalité $\Phi(u, v) = w$, une fonction uniforme de u et de w sous la seule condition que l'on ait $w > u$.

Lemme. *Si un nombre* ε *de* U *est plus petit que des termes de la suite* $\{\varphi_\alpha(\nu)\}$ *définis par un autre nombre* α *de* U *ou si cette propriété appartient à* $\Phi(\alpha, \varepsilon)$, *on a toujours la relation* $\Phi(\alpha, \varepsilon) > \varepsilon$, *et si* ε *possède cette propriété par rapport à tous les nombres de* U, $\Phi(x, \varepsilon)$ *est une fonction croissante de* x *définie dans le champ* U.

Dans le cas où l'on a $\alpha > \varepsilon$, on devra toujours, d'après les propriétés attribuées à Φ, avoir aussi

$$\Phi(\alpha, \varepsilon) > \alpha > \varepsilon ,$$

et la première partie de la proposition est alors évidemment superflue.

Dans le cas contraire ($\alpha \leqq \varepsilon$), il existera un nombre positif entier n tel que l'on aura

$$\varphi_\alpha(n) \leqq \varepsilon < \varphi_\alpha(n + 1) = \varphi_\alpha(1 + n) = \Phi[\alpha, \varphi_\alpha(n)] ,$$

où n est au moins égal à 1, puisque l'on a $\varphi_\alpha(1) = \alpha < \varepsilon$.

En outre, Φ étant supposée croissante comme fonction de sa deuxième variable, on déduit des relations précédentes

$$\varepsilon < \Phi[\alpha, \varphi_\alpha(n)] \leqq \Phi(\alpha, \varepsilon) .$$

De même, si l'on a

$$\Phi(\alpha, \varepsilon) < \varphi_\alpha(n + 1) = \Phi[\alpha, \varphi(n] ,$$

on devra, eu égard aux propriétés maintenues à Φ ainsi qu'à l'hypothèse $\alpha \leqq \varepsilon$, avoir

$$\alpha \leqq \varepsilon < \varphi_\alpha(n) ,$$

où n est au moins égal à 1 puisque $\varphi_\alpha(1) = \alpha$; la condition relative à $\Phi(\alpha, \varepsilon)$ implique donc celle qui est relative à ε.

La première partie de la proposition est donc bien ainsi établie dans les deux cas qui la conditionnent.

En ce qui concerne la seconde partie, pour deux nombres x et y $(y > x)$ de U, on peut toujours écrire $y = \Phi(x, z)$, et la partie déjà établie de la proposition étant applicable à ε en raison de l'hypothèse faite sur ce nombre, on aura $\Phi(z, \varepsilon) > \varepsilon$ et par suite eu égard aux propriétés déjà attribuées à Φ

$$\Phi(y, \varepsilon) = \Phi[x, \Phi(z, \varepsilon)] > \Phi(x, \varepsilon) ,$$

relation qui établit bien la seconde partie du lemme.

Soit ε un nombre quelconque de U et n un nombre entier positif quelconque.

Si ε est plus petit que tous les termes des suites définies par certains nombres de U, l'un quelconque de ceux-ci satisfera évidemment à la proposition.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si ε est plus petit que les termes de toute suite définie par un nombre quelconque de U *(et cette propriété s'étend alors évidemment à tous les nombres de* U *plus petits que* ε*)*, il sera justiciable, ainsi que tous les nombres de U plus petits que lui, du lemme. Un quelconque α de ces nombres définit toujours un nombre α_1 de U tel que l'on a

$$\varepsilon = \Phi(\alpha, \alpha_1)$$

et, le lemme étant applicable à ε, c'est-à-dire à $\Phi(\alpha, \alpha_1)$, on aura

$$\varepsilon = \Phi(\alpha, \alpha_1) > \alpha_1 .$$

Le nombre α étant, d'après une remarque déjà faite, justiciable du lemme, on pourra lui appliquer le même procédé dans les mêmes conditions et, en poursuivant cette application sur des nombres toujours décroissants, on pourra toujours obtenir $n - 1$ couples de nombres de U donnant lieu aux relations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \varepsilon = \Phi(\alpha, \alpha_1) & \text{avec} & \alpha, \alpha_1 < \varepsilon \\ \alpha = \Phi(\alpha', \alpha_2) & \text{avec} & \alpha', \alpha_2 < \alpha \\ \alpha^{(n-3)} = \Phi(\alpha_n, \alpha_{n-1}) & \text{avec} & \alpha_n, \alpha_{n-1} < \alpha^{(n-3)} . \end{array}$$

Tous ces nombres sont justiciables du lemme, de sorte que, dans le champ qu'ils déterminent pour les variables de Φ, celle-ci

sera croissante comme fonction de chacune de ses variables. On aura donc, si β désigne le plus petit des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ou, s'ils sont égaux, un nombre plus petit que leur valeur commune, les relations suivantes, dont l'une au moins sera une inégalité

$$\varphi_\beta(2) = \Phi(\beta, \beta) \leq \Phi(\alpha_n, \alpha_{n-1}) = \alpha^{(n-3)}$$

$$\varphi_\beta(3) = \Phi[\varphi_\beta(2), \beta] \leq \Phi(\alpha^{(n-3)}, \alpha_{n-2}) = \alpha^{(n-4)}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\varphi_\beta(n) = \Phi[\varphi_\beta(n-1), \beta] < \Phi(\alpha, \alpha_1) = \varepsilon .$$

Le nombre β satisfait ainsi à la condition posée et la proposition 5 de la première Note est donc bien établie avec les hypothèses réduites.

Les nombres de U qui possèdent la propriété caractéristique de la seconde partie du lemme sont évidemment plus petits que tous les autres nombres de U, de sorte qu'ils forment un champ particulier, qui a pour origine u_0 et pour lequel la fonction $\Phi(u, v)$ a toutes les propriétés qui lui avaient été attribuées dans ma première Note. On établirait facilement en outre que, si ε et ε' désignent deux nombres appartenant à ce champ, $\Phi(\varepsilon, \varepsilon')$ lui appartient aussi, de sorte que la fonction Φ définit, dans ce champ, une opération d'addition possèdent toutes les propriétés ordinaires et, en particulier, la propriété archimédienne.

Il n'est à ma connaissance rien qui permette d'affirmer qu'un continu linéaire n'admet que des métriques archimédiennes, bien que les exemples signalés jusqu'à présent de métriques non-archimédiennes (notamment par M. Hilbert dans son ouvrage *Grundlagen der Geometrie*) ne s'appliquent qu'à des ensembles ordonnés dont le type ordinal n'est pas celui du continu.

Il résulte bien des travaux de S. Lie que la droite n'admet comme groupes continus à un seul paramètre que les groupes semblables à celui des translations[1]; mais il importe d'observer que l'analyse de Sophus Lie implique, non seulement la continuité de la variable dépendante par rapport à la variable indépendante et au paramètre, mais encore l'existence des dérivées premières, propriétés qui doivent évidemment s'étendre au groupe paramétral représenté, dans ce qui précède, par l'équation $w = \Phi(u, v)$. Il n'est donc pas sans intérêt d'établir la proposition 5 de ma première Note indépendamment de toute hypothèse sur la continuité ou la croissance de $\Phi(u, v)$ comme fonction de sa première variable.

(Voir page suivante : *Errata*.) G. Combebiac (Limoges).

[1] S. Lie, *Theorie der Transformations-gruppen*, 3e vol., p. 6.