Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1911)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CONGRUENCES LINÉAIRES DE DROITES
Autor: Godeaux, Lucien
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13521

SUR LES CONGRUENCES LINÉAIRES DE DROITES

Dans cette Note, je détermine par un procédé élémentaire, quelles sont les congruences linéaires de droites qui peuvent se présenter.

1. — Soit Γ une congruence linéaire de droites. Par chaque droite de Γ, nous faisons passer deux plans π_1, π_2, déterminés par un procédé que nous ne spécifions pas. Les plans π_1, π_2, relatifs à toutes les droites de la congruence Γ forment respectivement des variétés V_1, V_2. Il peut se présenter les cas suivants :

1° Les variétés V_1, V_2 sont des développables et sont distinctes.

2° Les variétés V_1, V_2 se confondent en une seule développable V.

3° La variété V_1 est une développable et la variété V_2 une surface (enveloppe) proprement dite ne contenant pas V_1.

4° La surface (enveloppe) V_2 contient la développable V_1.

5° Les variétés V_1, V_2 sont des surfaces (enveloppes) distinctes.

6° Les variétés V_1, V_2 se confondent en une seule surface (enveloppe) V.

Nous allons examiner ces cas séparément.

2. — Lorsque les variétés V_1, V_2 sont des développables, toute droite, intersection de plans tangents à ces développables, est une droite de la congruence Γ. Par conséquent, pour que celle-ci soit d'ordre un, il faut et il suffit que V_1, V_2 se réduisent à des faisceaux de plans. Soient a_1, a_2 les droites, axes de ces faisceaux. Par un point de a_1 (ou de a_2) passent évidemment ∞^1 droites de Γ, par suite ces droites sont des

lignes singulières de la congruence. Il est évident qu'il n'existe pas d'autre ligne singulière.

Les droites s'appuyant sur deux droites fixes forment une congruence linéaire.

3. — Dans le cas où le lieu des plans π_1, π_2 est une seule développable, toute droite, intersection de deux plans de celle-ci, appartient à la congruence Γ. Par un point quelconque, il doit évidemment passer deux plans tangents à la développable ; par suite, celle-ci est un cône du second ordre et toutes les droites de Γ passent par le sommet de ce cône.

Les droites issues d'un point fixe forment une congruence linéaire.

4. — Passons au troisième cas. La développable V_1 est nécessairement un faisceau de plans. En effet, chaque plan de V_1 contient une simple infinité de droites de Γ, donc si par un point P passaient plusieurs plans de V_1, chacun d'eux contiendrait au moins une droite de Γ passant par P, et la congruence ne serait pas linéaire. Le même raisonnement montre que les droites de Γ situées dans un plan de V_1 forment nécessairement un faisceau.

Ces faisceaux sont déterminés dans chaque plan de V_1 par des faisceaux de plans appartenant à V_2. On en conclut que V_2 est une surface réglée et qu'à un plan de V_1 correspond une droite de V_2. Inversement, supposons qu'à une droite de V_2 correspondent α plans de V_1 ; c'est-à-dire que les plans du faisceau V_1 se distribuent en des groupes de α plans et que les faisceaux de droites de Γ situés dans les plans d'un de ces groupes sont déterminés par le même faisceau de plans de V_2.

Par un point de l'axe a du faisceau V_1 passent évidemment une infinité de droites de Γ, donc a est une droite singulière de la congruence.

Sur chaque droite de la réglée V_2, il existe α points communs à une infinité de droites de Γ, ce sont les sommets des faisceaux situés dans les plans de V_1. La seconde ligne singulière c de Γ sera donc le lieu des intersections des droites[1]

[1] Il faut remarquer que a ne se trouve pas sur la réglée V_2, par hypothèse ; ce cas est examiné dans le § suivant.

de V_2 et des plans de V_1 correspondants. Soit n l'ordre de la réglée V_2. Les points de rencontre de a avec la réglée V_2 sont évidemment des points multiples d'ordre α de c. Un plan de V_1 rencontre donc la courbe c en n points α^{uples} sur a et en un point simple extérieur à a, par suite c est d'ordre $\alpha n + 1$.

Les droites qui s'appuient sur une droite a *et sur une courbe d'ordre* αn + 1 *ayant* n *points multiples d'indice* α *sur* a, *forment une congruence linéaire.*

5. — Supposons actuellement que V_2 (doublement infinie) contienne V_1 (simplement infinie). On démontre comme précédemment que V_1 est nécessairement un faisceau de plans et que les droites de Γ situées dans un plan de ce faisceau forment elles-mêmes un faisceau. De tels faisceaux sont marqués par des faisceaux de plans d'axes d de V_2, de sorte que V_2 est encore une surface réglée.

La surface réglée V_2 contient la droite a, axe du faisceau de plans V_1, par hypothèse. Deux cas peuvent se présenter : Ou bien toute droite d rencontre la droite a, ou bien le contraire a lieu.

Dans le premier cas, supposons qu'à une droite d de V_2 correspondent n plans passant par a, alors tout point de a est le sommet de n faisceaux de droites de la congruence et cette droite est singulière.

Si l'on établit une correspondance (1, n) *entre les points d'une droite* a *et les plans passant par cette droite, les faisceaux de rayons dont les sommets sont sur* a *et dont les plans correspondent aux sommets, engendrent une congruence linéaire.*

Dans le second cas, supposons que n droites d s'appuient sur a et qu'à une droite d correspondent α plans de V_1 ; la congruence obtenue est la même que celle qui fait l'objet du § précédent.

6. — Supposons que V_1 et V_2 soient des surfaces (enveloppes) distinctes. Tout plan tangent à V_1 (ou à V_2) contient généralement un nombre fini α_1 (ou α_2) de droites de Γ ; cette congruence est donc engendrée par les intersections des plans correspondants dans une transformation d'indices (α_2, α_1). Supposons que n_1, n_2 soient les classes de V_1, V_2.

Soit P un point générique de l'espace. Par P_1 menons les plans tangents à V_1 ; les plans correspondants de V_2 forment une développable d'une certaine classe ν_2. Les droites de Γ passant par P sont donc au nombre de $n_1 \nu_2$. Par suite $n_1 = \nu_2 = 1$ et par symétrie, $n_2 = \nu_1 = 1$. V_1 et V_2 sont donc des gerbes de plans.

Aux plans d'un faisceau de la gerbe V_1 correspondent les plans d'un faisceau de la gerbe V_2 et réciproquement ; par suite, les α_1 plans correspondants à un plan de V_1 sont situés dans un faisceau. On en conclut que $\alpha_1 = 1$ et de même que $\alpha_2 = 1$.

La congruence Γ est donc le lieu des intersections des plans correspondants de deux gerbes collinéaires.

Un point sera singulier pour la congruence Γ si les plans des gerbes V_1, V_2 passant par ce point se correspondent dans la collinéation. On sait qu'il y a une infinité de pareils points et que leur lieu est une cubique gauche passant par les sommets des gerbes V_1, V_2.

Soient π_1 un plan de V_1, π_2 son correspondant dans V_2. Désignons par P_1, P_2 les points de rencontre du plan π_1 avec la cubique gauche singulière en dehors du sommet de la gerbe V_1. Aux plans de V_1 passant par P_1 correspondent des plans de V_2 passant aussi par ce point, donc π_2 passe par P_1. De même, ce plan passe par P_2 et Γ est le lieu des bisécantes de la cubique singulière.

Les bisécantes d'une cubique gauche forment une congruence linéaire.

Nous avons supposé implicitement, dans le raisonnement précédent, que le faisceau de plans commun aux gerbes V_1, V_2 n'est pas son propre correspondant dans la collinéation. S'il en était autrement, l'axe de ce faisceau serait une droite singulière. La cubique singulière se décomposerait en cette droite et en une conique la rencontrant. La congruence Γ serait alors un cas particulier de la congruence étudiée au § 4.

7. — Supposons que les surfaces (enveloppes) V_1, V_2 coïncident en une surface V de classe n.

Tout plan tangent à V contient généralement un nombre fini α de droites de Γ, cette congruence est donc le lieu des intersections des plans correspondants dans une transformation d'indices (α, α) d'une surface en elle-même.

Soit P un point quelconque de l'espace. Aux plans tangents à V passant par ce point correspondent les plans d'une développable de classe ν, par suite Γ est d'ordre $n\nu$. On a donc $n = \nu = 1$ et Γ est une gerbe de droites.

Lucien Godeaux (Liège).

NOUVELLES DÉMONSTRATIONS D'UN THÉORÈME RELATIF AU CERCLE DES NEUF POINTS

I. — Théorème. — *Le cercle des neuf points d'un triangle est tangent intérieurement au cercle inscrit et extérieurement aux cercles exinscrits.*

En étudiant depuis quelques années le théorème que je viens d'énoncer, j'ai trouvé neuf démonstrations différentes qui me semblent encore nouvelles. La *première* de ces démonstrations a déjà été publiée dans *l'Enseignement mathématique* (VII^e année, 1905, n^o 6, p. 479-482) ; j'exposerai donc ici les huit autres à partir de la deuxième.

La 2^e et la 3^e démonstrations ne dépendent ni des théorèmes des aires, ni de ceux de la proportion ; les quatre autres, depuis la 4^e jusqu'à la 7^e sont encore indépendantes des théorèmes relatifs à la proportion.

Dans ce qui suit, je désigne toujours par A′, B′, C′ les milieux respectifs des côtés BC, CA, AB du triangle ABC, et par X, Y, Z les points de contact du cercle inscrit ou de l'un des cercles exinscrits avec les côtés BC, CA, AB. Il s'agit alors de démontrer que le cercle A′ B′ C′ est tangent au cercle XYZ.

2^e Démonstration.

Je suppose, pour fixer les idées, que le cercle XYZ soit le cercle inscrit.

Si le triangle était isocèle, les deux cercles A′ B′ C′, XYZ se