SUR L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE, D'APRÈS A. MANNHEIM, DE L'ÉQUATION INTRINSÈQUE D'UNE COURBE PLANE

SUR L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE, D'APRÈS A. MANNHEIM, DE L'ÉQUATION INTRINSÈQUE D'UNE COURBE PLANE

L'équation intrinsèque d'une courbe plane est susceptible d'une élégante interprétation géométrique donnée par A. MANNHEIM pour la première fois[1] : *soit*

$$\rho = f(s) \, ,$$

l'équation intrinsèque d'une courbe plane (C); *lorsque cette courbe roule sans glisser sur une droite fixe* Ox, *le centre de courbure correspondant au point de contact décrit la courbe* (Γ) *d'équation*

$$y = f(x) \, ,$$

par rapport à des axes rectangulaires dont l'un est Ox.

Dans un grand nombre de cas, on peut associer ainsi des courbes (C) et (Γ) remarquables. MANNHEIM établit géométriquement que (Γ) est une droite lorsque (C) est une spirale logarithmique, une parabole lorsque (C) est une développante de cercle, une circonférence lorsque (C) est une cycloïde, une ellipse lorsque (C) est une épicycloïde ordinaire et, enfin, une parabole lorsque (C) est une chaînette. Le résultat relatif à l'épicycloïde se trouve aussi dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1896 (p. 102 et 245), et celui qui est relatif à la chaînette a été étendu par CESARO (*Nou-*

---

[1] *Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 2e série, t. IV, 1859, p. 93-104).

velles Annales, 1886, p. 75) aux courbes d'équation intrinsèque

$$c\rho = s^2 + a^2$$

auxquelles il a donné le nom de *courbes alysoïdes*. Mais ce ne sont pas là les seuls exemples dignes d'intérêt. Lorsque (C) est la clothoïde

$$x = \int_0^s \cos s^2 \, ds \ , \qquad y = \int_0^s \sin s^2 \, ds \ ,$$

la courbe (Γ) est une hyperbole équilatère. Lorsque (C) est la chaînette d'égale résistance de Coriolis, d'équation intrinsèque (Minchin, *Treatise on Statics*, 1877)

$$\rho = \rho_0 \operatorname{ch} \frac{s}{\rho_0} \ ,$$

la courbe (Γ) est la chaînette. Plus généralement, Cifarelli (*Giornale di Matematiche*, t. XXXVI, 1898, p. 183) a considéré les courbes

$$\rho = 2b \operatorname{ch} \frac{s}{c} \ ,$$

pour lesquelles les courbes (Γ) sont des transformées homographiques de la chaînette.

Je me suis proposé de généraliser cette interprétation géométrique devenue classique. Si on fait rouler la courbe (C) sur une courbe quelconque et non plus sur une droite, le lieu (Γ) des centres de courbure relatifs aux points de contacts se compose de deux courbes distinctes (Γ_1) et (Γ_2), qui correspondent aux deux positions relatives de (C) et de la courbe sur laquelle roule (C) par rapport à la tangente de contact.

L'étude des courbes (Γ_1) et (Γ_2) est, en général, compliquée et n'offre rien de remarquable, à moins que la courbe fixe sur laquelle roule (C) ne soit une circonférence. Dans ce cas, en effet, a étant le rayon de cette circonférence, les équations

$$r = a + f(a\theta) \ , \qquad r = a - f(a\theta) \ ,$$

représentent respectivement, en coordonnées polaires, les courbes (Γ_1) et (Γ_2) : le pôle est le centre de la circonférence.

Comme exemples simples, je signalerai celui de la spirale logarithmique pour laquelle les courbes (Γ_1) et (Γ_2) sont des spirales d'Archimède, et celui de la courbe de Delaunay. Considérons une courbe de Delaunay méridienne de la surface de révolution à courbure moyenne constante $\frac{1}{a}$, c'est-à-dire une courbe intégrale de l'équation différentielle

$$(y^2 + b^2)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + 2ay = 0 \; ; \qquad (b^2 < a^2) \, .$$

De cette équation résulte l'équation intrinsèque de la courbe de Delaunay

$$\rho = \frac{a\left(a^2 - 2ac\cos\frac{s}{a} + c^2\right)}{c\left(c - a\cos\frac{s}{a}\right)}, \qquad (c^2 = a^2 - b^2) \, .$$

équation intrinsèque qui fut formée pour la première fois par Cesaro[1]. La courbe de Delaunay roulant sur une circonférence de rayon a, les courbes (Γ_1) et (Γ_2) ont pour équations polaires :

$$(\Gamma_1) \qquad r = 3a + \frac{a(a^2 - c^2)}{c(c - a\cos\theta)},$$

$$(\Gamma_2) \qquad r = -a - \frac{a(a^2 - c^2)}{c(c - a\cos\theta)} \, .$$

Ce sont donc deux conchoïdes focales de conique. Pour $a < c$, en posant $a = ce$, la courbe (Γ_2) d'équation polaire

$$r = a \, . \, \frac{1 - e^2}{1 - e\cos\theta} - a \, ,$$

est la conchoïde focale d'une ellipse de grand axe $2a$ et d'excentricité e, le rayon vecteur étant diminué du demi-grand axe : on reconnaît là une courbe remarquable qui a été étudiée par Jerabek dans *Mathésis* (1885, p. 110).

E. Turrière (Alençon).

[1] *Nouvelles Annales*, 1888, p. 219, et *Lezioni di Geometria intrinseca*, 1896, p. 69.