Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1911)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Notations rationnelles pour le système vectoriel[1].

12. — *A propos d'un article* de M. E.-B. Wilson.

Réponse de MM. Burali-Forti et Marcolongo.

I. Dans un article intitulé *The unification of vectorial notations* [*Bull. of the American Mathem. Society,* 2 d series, v. XVI, n° 8, pp. 415-436, New-York, May, 1910], M. E.-B. Wilson analyse les Notes que nous avons publiées dans les « *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* » et surtout nos ouvrages, récemment parus[2]. Elève de Gibbs, dont il a publié les leçons sur l'analyse vectorielle [*Vector Analysis*], bien avant la publication, dans leur forme originelle, dans « *The Scientific Papers* » [New-York, 1906; v. II, pp. 17-90]; il trouve illogique, inexact et condamnable, tout ce qui s'éloigne de la méthode de Gibbs. M. Wilson, au fond, ne fait que répéter ce qu'il a déjà écrit dans l'*Enseignement mathématique,* XI^me^ année, 1909, pp. 211-216. Malgré notre réponse [*Ibidem,* pp. 463-466], nous nous croyons obligés de montrer encore une fois que *toutes les critiques de M. Wilson n'ont pas de fondement logique et scientifique.*

II. M. Wilson observe avant tout, à propos de notre travail historique critique et bibliographique : « *It is needless to observe that the work was accomplished with the expected accuracy. It was, however, not done with all the completeness desirable* » (p. 416)[3].

[1] Voir l'*Ens. math.*, XI^e^ année, 1909, n° du 15 janvier, p. 41-45 ; n° du 15 mars, p. 124-134 ; n° du 15 mai, p. 211-227; n° du 15 juillet, p. 381; n° du 15 novembre, p. 459-466. — XII^e^ année, n° du 15 janvier 1910, p. 39-54. — L'abondance des matières nous a obligé de retarder la publication de la présente Note. *(Réd.)*.

[2] *Elementi di Calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica ed alla fisica-matematica.* Bologna, Zanichelli, 1909. *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica-matematica.* Torino, Petrini, 1909. *Eléments de Calcul vectoriel...,* traduit de l'italien par S. Lattès, Paris, A. Hermann, 1910. M. Wilson a oublié de reproduire exactement les titres de ces deux ouvrages.

[3] Il paraît que M. J. Rose est de la même opinion. Dans un article : J. Massau (1852-1909). *Courte notice sur sa vie et ses travaux en mécanique et en géométrie vectorielle* [*Ens. mathém.* XII ann. 1910, pp. 187-200] il a écrit, p. 199. *Cela m'étonne même que, dans le tableau des deux*

Dans les Notes des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* il est nécessaire de le répéter, nous nous sommes occupés seulement du *système minimum,* c'est-à-dire de la partie de calcul vectoriel qui est développée dans tous les traités modernes. La critique de M. Wilson n'est pas fondée, d'autant plus que dans ces Notes (Nota V, t. XXVI, pp. 369-377, 1908), nous avons montré que ce système est bien loin d'être complet, et qu'il est nécessaire d'adopter le système complet de Grassmann.

M. Wilson dit encore (p. 416) : « *The suggestion* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *for the scalar product seems particularly infelicitous in view of the fact that this notation is in actual use for the vector product. So far as we are aware, this is the first suggestion which violently* (!) *and confusingly differs from a notation which has become fairly widely established.* »

C'est un premier exemple (nous en verrons bien d'autres) de la manière avec laquelle M. Wilson exprime des faits et des jugements. Il faut observer, en effet, qu'en Allemagne (la plus grande partie des livres sur le calcul vectoriel : mémoires scientifiques, encyclopédie mathématique) ; en Angleterre (mémoires de HEAVISIDE, etc.) ; etc. on n'adopte absolument ni la *forme,* ni l'*esprit* des notations de Gibbs. Ceux qui ont, en partie, suivi Gibbs, ont été forcés de changer ses notations ; par exemple M. PRANDTL [1] et MM. JAUMANN, FISCHER, VALENTINER [2].

---

mathématiciens italiens (Ens. mathém. 1909, p. 41) *il ne soit pas fait mention des notations de Resal, de Saint-Venant et de Massau* ». Au contraire, il faut s'étonner que M. Rose n'ait pas lu le nom de Resal dans notre tableau. Si M. Rose se fût donné la peine de lire nos Notes des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* [t. XXIV, p. 65-80, Nota II, § III, note (29) e (30)], il n'aurait certainement pas commis de pareilles fautes d'histoire et de bibliographie, et n'aurait pas attribué à Massau la paternité de la *curieuse formule*

$$\mathrm{M}\bar{c}\,\mathrm{M}\overline{ab} = \bar{a}(\overline{bc}) - \bar{b}(\overline{ac}) \,,$$

qui est équivalente à

$$\mathbf{c} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{b})\,\mathbf{a} - (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\,\mathbf{b} \,,$$

qui n'est autre chose que la formule sur les produits régressifs de Grassmann ou sur le double produit vectoriel de Gibbs.

Nous n'avons pas cité Massau (nous n'avons pu malheureusement consulter sa mécanique qui est bien rare) ; mais ses notations ont éte exclues par nous implicitement, comme celles de Saint-Venant, et M. Rose pourra s'en convaincre en lisant nos Notes des *Rendieonti.*

Ajoutons encore, en passant, que de Saint-Venant a défini le produit géometrique de deux vecteurs (produit extérieur de Grassmann) *indépendamment* de Grassmann, mais certainement *après* Grassmann [*Compte Rend.* t. 21, pp. 620-625, 2e semestre 1845]. M. Rose a commis une faute ; l'année du memoire étant 1845 et non 1844 !

[1] M. PRANDTL de Göttingue, il y a quelques années, a publié trois articles fort intéressants dans le *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung : Grundsätze für eine einheitliche Schreibung der Vektorenrechnung im technischen Unterricht* [Bd. 12, 1903, p. 444] ; *Ueber eine einheitliche Bezeichnungsweise der Vektorenrechnung im technischen und physikalischen Unterricht* [Bd. 13, 1904, pp. 36-40] ; *Ueber die physikalische Richtung in der Vektoranalysis* [Bd. 13, 1904, pp. 436-449] ; ce dernier article est une réponse à celui de M. MEHMKE : *Vergleich zwischen der Vektoranalysis amerikanischer Richtung und denjenigen deutsch-italienischer Richtung* [Bd. 13, 1904, pp. 217-228]. M. Prandtl a proposé d'écrire $\mathbf{a} \bigcirc \mathbf{b}$ le produit intérieur de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$. Voir notre Nota V des *Rendiconti* (not. 9).

[2] JAUMANN, *Die Grundlagen der Bewegungslehre,* Leipzig, Barth, 1905 (nous nous occupe-

Si même dans les sciences exactes on pouvait être libre de raisonner indépendamment des habitudes acquises, M. Wilson aurait dû accepter notre proposition ; car nous avons montré :

1° que la notation $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ pour le produit intérieur n'est pas nouvelle, et c'est la première adoptée par Grassmann ;

2° qu'elle jouit de toutes les propriétés du signe $\times$ de l'algèbre ;

3° qu'il est bien préférable de laisser au . le rôle de séparateur ;

4° que la notation **ab** doit être réservée pour le produit alterné (bivecteur) de Grassmann.

Si M. Wilson n'est pas encore persuadé, nous ne savons pas qu'y faire. Au reste, il paraît que nous sommes d'accord avec M. Wilson sur la nécessité d'un signe d'opération pour l'indication des deux produits (scalaire et vectoriel) ; ce qui est bien l'esprit des notations de Gibbs. Sa forme est une question tout à fait sans importance ; mais pourquoi doit-elle être fixée par Gibbs et non par Grassmann qui est antérieur ? Pourquoi doit-on avoir, contrairement aux règles de l'algèbre,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad ?$$

III. Dans les n^{os} 2-5 de son long article, M. Wilson analyse diffusément nos *Elementi*. Ses critiques s'adressent surtout à la partie générale de nos deux livres ; car M. Wilson a commis la faute de ne pas considérer les applications ou de les regarder comme une partie tout à fait isolée. Ce sont au contraire ces applications qui jettent le plus de lumière sur la partie générale ; ce sont, sans doute, les applications qui doivent montrer la valeur de la méthode et des notations. M. Wilson ne veut pas même reconnaître que dans les applications, dans nos deux livres, nous, et ceux qui suivent notre méthode, nous avons fait beaucoup plus que nos prédécesseurs, et aussi, nous l'espérons du moins, beaucoup mieux.

Sur les six premiers chapitres des *Elementi*, M. Wilson n'a pres-

---

rons bientôt de ce livre peu connu). L'auteur emploie les notations de Gibbs ; mais ensuite il doit s'en éloigner pour la notation d'une dyad. La notation de Gibbs **ab** pouvant se confondre avec celle de produit extérieur (bivecteur) de Grassmann, très employée en Allemagne, M. Jaumann doit changer **ab** de Gibbs en **a,b** ; et ainsi pour les dyads scalaires ou vectorielles il écrit

$$\mathbf{a}\,;\mathbf{b}\ , \qquad \mathbf{a}\overset{\times}{,}\mathbf{b}\ \ !$$

M. Fischer, *Vectordifferentiation und Vectorintegration*, Leipzig, Barth, 1904, emploie aussi les notations de Gibbs. A propos de cet ouvrage, on pourra utilement voir quelques articles de MM. Mehmke et Fischer dans le *Jahresbericht* D. M. V. [Bd. 14, pp. 211-212 ; 344-358 ; 354-358]. M. S. Valentiner : *Vektoranalysis*, Leipzig, 1907 (Sammlung Göschen) ne diffère pas de Jaumann.

Tout ceci montre encore une fois l'opportunité et la vérité de ce que nous disions en commençant nos travaux, *Rendiconti*, etc.

« Le notazioni fondamentali del minimo sistema vettoriale non devono essere in contradizione con quelle fondamentali dei più ampi sistemi meccanico-geometrici di Möbius, Hamilton, Grassmann. »

que rien à observer ; seulement, p. 419, notre opérateur i « *an interesting departure from the ordinary texts* » et certaines formules font une « *unfavorable impression* » à M. Wilson ; mais il veut bien admettre que cette mauvaise impression est due à la « *unfamiliarity of the symbols* ». Nous pouvons assurer M. Wilson que nos élèves, en peu de jours, acquièrent toute la pratique désirable avec l'opérateur i, ne font plus de fautes et n'ont pas de mauvaise impression. D'autre part, les avantages de cet opérateur (surtout en Cinématique) sont tels (et M. Wilson, par exception, veut bien les signaler, p. 422) qu'il n'est pas question de changer.

M. Wilson trouve encore nos définitions directes et absolues de « rot et div » [*Elementi*, Part. I, Cap. VI, 3] « *higlhy ingenious definitions and have much to commend them*, p. 420 » et il veut bien observer qu'elles ont sur les autres [définitions au moyen d'intégrales ; nous ne parlons pas des définitions cartésiennes] de nombreux avantages.

Mais tout à coup, quelques lignes de la page 72 de nos *Elementi* viennent obscurcir tout ce qu'il y avait de nouveau, de clair et de simple. Ecoutons M. Wilson : « *It is in this same chapter that the authors reveal their remarkable discovery that the laplacian operator.*

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

« *is essentially different according as it is applied to a scalar or to* « *a vector function. Upon this discovery they are especially insis-* « *tent on every possible occasion. They even go so far as to intro-* « *duce different symbols* Δ *and* Δ' *for the operator according as the* « *operand is scalar or vector. Then they are able to write*

$$\Delta V = \text{grand div } V \ ,$$

$$\Delta' V = \text{grad div } V - \text{curl curl } V \text{ ».} \qquad \text{(4)} \qquad \text{(p. 421)}$$

Ce que M. Wilson affirme manque à tel point de justesse, que nous avons de la peine à croire à ce qu'il a écrit et nous craignons qu'il n'y ait ici un grand malentendu.

Voici ce que nous avons dit à la page 72 : « *Nelle applicazioni si presentano le due funzioni*

$$\text{(3)} \qquad \Delta_2 = \text{div grad} \ , \qquad \Delta_2' = \text{grad div} - \text{rot rot} \ ;$$

« *la prima opera su di un numero e produce un numero, la seconda* « *opera su di un vettore e produce un vettore.* »

« *Le funzioni* Δ_2 *e* Δ_2', *ben distinte e definite dalle* (3) [nous prions

le lecteur de bien voir que nous disons « *definite* »] *hanno ris-*
« *petto all'algoritmo cartesiano, la forma simbolica comune*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \; ; \quad \text{ecc. »}$$

Il suffit de confronter *ce que nous avons dit* et ce que M. Wilson *nous fait dire,* pour comprendre aussitôt que M. Wilson ne nous a pas compris.

Les opérateurs (3), ou leur forme équivalente [*Omografie vettor.,* n° 25]

$$(3') \qquad \Delta m = \mathrm{I}_1 \frac{d \operatorname{grad} m}{d\mathrm{P}}, \qquad \Delta' \mathbf{u} = \operatorname{grad} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}},$$

ont évidemment une forme absolue et quand ils sont définis par (3) ou (3′) ils sont naturellement divers.

Mais M. Wilson veut trancher la question en observant que « *the laplacian operator may and should be defined by its intrinsic* « *properties such as are expressed in* (5) [c'est-à-dire, sous une forme plus rigoureuse que celle établie par notre critique,

$$(5) \qquad \Delta\varphi = \lim_{r=0} \frac{6(\bar{\varphi} - \varphi)}{r^2}, \qquad \text{où} \qquad \bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi r^2} \int \varphi d\sigma,$$

σ étant une sphère de rayon r avec le centre en P] *and when this definition is given it appears that the operator is equally applicable and with the same significance to any quantity* φ... » [p. 423].

Or les formules (5) et (4) appliquées à φ prouvent seulement que *deux fonctions distinctes* ont en commun une propriété particulière ; mais cela ne veut pas dire qu'elles soient identiques ; et la formule (5) vaut pour φ nombre ou vecteur, car le second nombre est exprimé par des fonctions qui sont applicables à des vecteurs ou à des nombres. Cela prouve seulement que : il y a des fonctions applicables à des vecteurs ou à des nombres et par lesquelles on peut exprimer $\Delta\varphi$ dans les deux cas (φ nombre ou vecteur). Peut-on conclure que Δ est unique ?

Encore, dans (5), lorsque φ est une fonction numérique continue, etc., $\bar{\varphi}$ est la valeur de φ dans un certain point de la surface de la sphère qui a P pour centre et r pour rayon ; mais si φ est un vecteur, $\bar{\varphi}$ est seulement une valeur moyenne qui n'est pas en général une des valeurs de φ sur σ. Nous croyons donc que même la définition géométrique (quoique indirecte) montre une diversité entre Δ appliqué soit à un nombre, soit à un vecteur.

Et enfin nous faisons observer qu'en faisant usage du ∇ de Hamilton et toujours avec les symboles I, I^{-1}, les (3′) deviennent

$$-\nabla^2 m\ , \qquad -I\nabla^2 I^{-1}\mathbf{u}\ ;$$

de manière que le Δ de Gibbs a deux formes différentes

$$-\nabla^2 \quad \text{et} \quad -I\nabla^2 I^{-1}\ .$$

Il est vrai que les quaternionistes modernes suppriment I et I^{-1} et réduisent ainsi les deux symboles à un seul $-\nabla^2$; mais nous avons déjà montré la faute qu'ils font[1].

On comprend aisément pourquoi le Δ de Gibbs a la forme commune bien connue lorsqu'on fait usage des coordonnées cartésiennes. Dans ce système le point est représenté par des nombres; et les opérations différentielles sont données par la dérivée usuelle d'un nombre qui est fonction d'un nombre. Or les propriétés formelles, au moins, de ces dérivées sont les mêmes que celles des dérivées d'un vecteur par rapport à un nombre dont il est fonction. Il n'y a donc rien de singulier que deux fonctions différentielles bien distinctes puissent avoir la même forme tachygraphique. La singularité consiste au contraire dans la déduction que l'on veut faire de l'*univocité absolue* de cet opérateur; sans observer que le symbole différentiel, applicable à toute entité $\mathbf{u}$ fonction de P, avec la même définition formale absolue, donne naissance à des opérateurs linéaires bien distincts selon qu'il est appliqué à un vecteur (ou à un nombre), à une homographie (ou nombre).

M. Wilson a la bonté de dire que nous laissons le lecteur « *with* « *a wrong or an unfortunately restricted point of wiew* » (p. 436). Si dans nos livres il y a des fautes, M. Wilson ne les a certainement pas découvertes[2]; au contraire, M. Wilson nous a abondamment prouvé qu'il ne sait ni se corriger des erreurs habituelles, ni s'éloigner du champ bien étroit des fonctions tachygraphiques.

IV. — Dans son n° 4, M. Wilson prend la défense du *vecteur symbolique* ∇ de Gibbs (que nous avons complètement aboli) et en

---

[1] C'est un principe fondamental de logique mathématique [Nota 3ª des *Elementi*] que $x = y$ signifie :

« toute propriété de x est aussi propriété de y »

Si x et y sont des opérateurs, un de ses éléments caractéristiques est le *champ d'opération*; donc pour que x soit égale à y, il est nécessaire que x et y aient le même champ. Or nos Δ et Δ' définis par (3) ont des champs différents.

M. Wilson peut bien ne pas accepter cette distinction logique; mais pour avoir une idée des inconvénients qui en dérivent, il pourra lire ce que M. Peano a écrit dans son *Formulario* — Editio V, pp. 73-82.

[2] Dans les *Elementi*, en parlant de l'opérateur i (celui qui produit une mauvaise impression à M. Wilson) nous avons commis *délibérément* une faute, pour ne pas nous éloigner trop du commun usage et parce que cette faute n'a pas de graves inconvénients. Que M. Wilson cherche les fautes concernant l'opérateur i.

dernière analyse il fait ce raisonnement : « Dans beaucoup de formules ∇ se comporte vis-à-vis de $\cdot$ et $\times$ (ce sont les symboles « de Gibbs qui correspondent à nos $\times$ et $\wedge$) comme un vecteur ; « donc, etc. »

C'est pour M. Wilson un dogme de logique de croire démontré un théorème, dès qu'il l'a reconnu vrai dans quelques cas.

Suivons (pour un seul instant) les notations de Gibbs. M. Wilson ne peut pas nier que l'on a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathrm{I}_1 \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} ; \qquad \nabla \times \mathbf{u} = 2\mathrm{V} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} .$$

L'homographie $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$ est parfaitement déterminée avec les deux fonctions $\mathrm{I}_1 \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$ (premier invariant) et $\mathrm{V}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$ (vecteur de l'homographie) ; et il y a une infinité de vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ tels que

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \mathrm{I}_1 \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} , \qquad \mathbf{y} \times \mathbf{u} = 2\mathrm{V} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} ;$$

donc : le vecteur symbolique ∇ a, pour chaque vecteur $\mathbf{u}$, une infinité de valeurs par rapport aux opérations $\cdot$ et $\times$.

Mais de quelle sorte de vecteur s'agit-il ? Qu'est-ce que l'on entend par vecteur symbolique ?

Nous savons très bien qu'une grande partie de la mathématique tombe dès que l'on élimine, avec soin, les termes inutiles et dès que l'on veut définir tout ce qui reste. Mais cela ne doit préoccuper personne ; ce qui reste est l'utile !

Des formules que nous avons rappelées, il résulte que l'on peut écrire

$$\nabla \cdot = \mathrm{I}_1 \frac{d}{d\mathrm{P}} ; \qquad \nabla \times = 2\mathrm{V} \frac{d}{d\mathrm{P}} ;$$

et nous demandons : quelle relation y a-t-il entre le produit intérieur et vectoriel et le premier invariant ou le vecteur de l'homographie $\frac{d}{d\mathrm{P}}$ et, si les deux signes $\cdot$ et $\times$ sont inutiles, par quelle étrange vertu le symbole ∇ leur donne t-il, dans les deux cas, une valeur ?

Il faut vraiment convenir qu'il n'y a pas de notations plus incorrectes *(particularly confused and infelicitous)* à défendre !

$\nabla \cdot$ et $\nabla \times$ sont des tachygraphes accidentels, car ils ont une expression absolue avec des opérateurs convenables ; mais ∇ est encore moins qu'un tachygraphe ; c'est une mauvaise transformation *(particularly confused and infelicitous)* du ∇ de Hamilton, qui, avec les symboles $\mathrm{I}, \mathrm{I}^{-1}$ est *un opérateur quaternional très exact.*

Enfin, nous demandons à M. Wilson si l'idée de réduire les choses aux concepts clairs et simples a peut-être empêché les méthodes si simples de calcul vectoriel de se plier aux applications les plus variées?

Tout le reste de nos *Elementi*, la partie la plus importante des applications ne provoque pas de critique; M. Wilson, au contraire, trouve que « *the large amount of material which has been « put into a small space without any apparent crowding or obscu- « rity is especially notewortlhy and has been accomplished langely « by adherence to the program of using purely vectorial methods.* » (p. 429).

Au moins nos fautes n'ont pas eu de suites fâcheuses!

V. — Nos *Omografie vettoriali* sont examinées dans les n[os] 6 et 7 de l'article de M. Wilson. Il observe avant tout que nous « *have « no hesitation about adding together a number* x *and a homogra- « phy* α. *They regard a number, whenever convenient, as a linear « transformation.* » (p. 429). Et il explique que si x est un nombre et α une homographie, cela signifie que

$$(x+\alpha)\mathbf{u} = x\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} \qquad (\mathbf{u} \text{ arbitraire}) .$$

Mais à la vérité nous ne pouvons pas comprendre M. Wilson; qu'y a-t-il d'étrange en cela? Gibbs (*Vector analysis*, p. 260) a lui-même considéré $\mathbf{r}' = c\mathbf{r}$ (c est un nombre) comme une fonction linéaire de $\mathbf{r}$; et nous avons fait ici ce que tout le monde fait, et à juste titre, en regardant un nombre (voir *d* dans l'*Introduction aux Omografie*) comme un opérateur linéaire. Moins encore nous ne voyons pourquoi les notations si simples et si correctes

$$I_1(\alpha+\beta) = I_1\alpha + I_1\beta .$$

sont « *particularly confused and infelicitous.* » (p. 430).

M. Wilson a bien compris que dans l'exposition (si profondément différente de celle de Gibbs) des transformations linéaires, notre point de vue n'est pas algébrique: nous avons considéré ces transformations comme des opérations (p. 431). La supériorité de notre exposition (il est bien entendu que nous n'avons pas la prétention d'avoir fait des découvertes) pour la clarté, la simplicité et la brièveté sera montrée par une analyse de nos méthodes et de celles de Gibbs que nous publierons bientôt. M. Wilson ne s'est sans doute pas livré à cet examen, qui est surtout utile pour les applications que nous avons faites et celles..... que l'on ne trouve pas dans le livre de Gibbs et de Jaumann, etc. On trouve donc bien singulier de lire, p. 431: « *Whe should be happy to see eve- « ryone who is interested in vectors and who believes in their neces- « sity adapt the authors' method.....* ».

Mais la chose qui frappe encore davantage M. Wilson et qu'il critique beaucoup, est notre définition de grad α (α est une homographie) ; [*Omogr. vettor.*, n. 22]. Il observe avant tout que : « *It* « *looks as if the authors had temporarily fallen back to some ex-* « *tent into the fatal slough of tachygraphy against which they are* « *so careful to warn us.* » (p. 433).

Sans aucun doute, M. Wilson a une idée bien différente de la nôtre du mot tachygraphe. Nous nous permettons de lui rappeler qu'un tachygraphe a pour but d'écrire sous forme abrégée le résultat d'un calcul fait avec les coordonnées. Décomposer une opération complexe en trois autres (comme nous avons fait pour la définition de grad α) est donc une opération tachygraphique ?

Au reste, M. Boggio a donné récemment une définition de grad α très simple et tout à fait absolue[1], que l'on peut présenter de plusieurs manières différentes.

Si, par exemple, $\mathbf{a}$ est un vecteur constant, α une homographie fonction de P, on a, *par définition*

$$(\underset{P}{\operatorname{grad}}\, \alpha) \times \mathbf{a} = \underset{P}{\operatorname{div}}(K\alpha\mathbf{a}) \ ;$$

on l'aurait pu déduire de la formule [10], p. 57 des *Omografie.*

M. Wilson dit encore beaucoup d'autres choses, sans doute fort intéressantes, mais nous n'avons pas l'avantage de les comprendre.

« *If the authors had seen fit to call the vector defined by* (10) « *curl* α *or* $\sqrt{\alpha}$ *or anything else selected at random from the vast* « *realm of mathematical notations, they might have observed a si-* « *milar lack of analogy. There is only one exception — if they had* « *called their vector div* $K\alpha$, *they would have been surrounded on* « *every side with the most persistent analogies.* » (pp. 433-434).

Nous ne comprenons pas ce que M. Wilson a voulu dire par div $K\alpha$ dont nous n'avons jamais parlé.

Nous avons considéré grad α car nous en avions le droit, de même que Gibbs a considéré lap, pot, max (qui n'ont pas eu de succès) ; nous ne sommes pas en contradiction avec les définitions précédentes, car si α est un nombre, nous avons de nouveau la définition usuelle de gradient d'une fonction numérique; nous avons considéré cette fonction, car c'est avec elle que le théorème sur le gradient (Gauss) a son extension naturelle dans la formule (*Omogr.*, p. 72)

$$\int \operatorname{grad} \alpha d\tau = -\int \alpha \mathbf{n} d\sigma \ ;$$

et avec cette fonction dans la mécanique des corps déformables,

---

[1] *Sul gradiente di una omografia vettoriale* (*Rend. Acc. Lincei,* s. V, v. XIX, 2e sem. 1910, pp. 383-389).

après avoir défini l'homographie (dilatation) β des pressions, les équations indéfinies et à la frontière pour l'équilibre, prennent la forme absolue (et sont démontrées d'une manière absolue)

$$\rho\mathbf{F} = \text{grad}\ \beta\ , \quad \mathbf{F}_n = \beta\mathbf{n} \quad [\textit{Omografie}, \text{ p. 72-73}].$$

Si M. Wilson n'est pas encore satisfait, il doit être excusé, du moins en partie. En effet, il avoue. p. 435, que : « *It will not be* « *feasible to give any account of the last chapter of the Omografie,* « *which contains applications to elasticity and to electrodyna-* « *mics*[1]. » Il n'a pas voulu se donner la peine d'examiner ce qui constitue la vraie pierre de touche de toutes les méthodes vectorielles : les applications.

Le lecteur peut maintenant juger de la critique de M. Wilson.

Dans l'*Enseignement mathématique,* notre critique a dit que ce n'était pas le cas de briser une lance en faveur de Gibbs. Il est libre de croire qu'il n'y a rien de meilleur que le système de son maître.

---

[1] Nous pouvons donner à M. Wilson de nombreux exemples de tachygraphes. Il n'a qu'à lire les traités allemands de Calcul vectoriel. Consulter en outre les deux travaux suivants : V. FISCHER, *Darstellung der Bewegungsgleichungen für elastische Körper in Vektorform* [*Journal f. reine u. ang. Mathematik,* Bd. 126 (1903) pp. 233-239]. L'auteur, en partant des équations bien connues en *coordonnées cartésiennes,* passe à la forme vectorielle. M. Wilson pourra comparer avec ce que nous avons fait dans les *Omografie*. Chap. III, § 2, 3.

M. VOIGT, dans son mémoire : *Etwas über Tensorenanalysis* [*Nachrichten von der Königl. Gesell. der Wiss. zu Göttingen,* 1904, pp. 495-513] a défini d'une manière tout à fait tachygraphe cartésienne [les composantes orthogonales d'un tenseur T et, après avoir observé que les expressions, bien connues,

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\ ; \qquad \text{etc.}$$

peuvent être envisagées comme les composantes d'un certain vecteur, il dit que, à cause de sa grande analogie « *mit der Divergenz* (!!!) *eines Vektors passend durch div T bezeichnen kann* ».

De manière que : « *Wie die Symbol* Δ, *so bedeutet hiernach auch div eine verschiedene Grösse je nach die Natur seines Argumentes* ». Et après cela, M. Voigt peut écrire les équations pour l'équilibre d'un corps déformable sous la forme

$$\rho\mathbf{F} = \text{div}\ \mathbf{T}\ .$$

Si le tenseur T a pour composantes

$$T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = p\ ,$$

comme il arrive dans le cas des fluides, nous avons la merveilleuse transformation de div T en grad p; car tout le monde écrit les équations d'équilibre d'un fluide ainsi

$$\rho\mathbf{F} = \text{grad}\ p\ .$$

M. Wilson pourra lire le Chap. III, § 2, 3 de nos *Omografie.*

La théorie des moments d'inertie et le mouvement d'un corps autour d'un point fixe dont M. Voigt s'occupe dans son mémoire, constituent une élégante application des *Omografie.* Voir : R. MARCOLONGO, *Momenti d'inerzia ed impulso nella dinamica dei sistemi rigidi* [*Rend. Acc. delle Scienze fisiche e mat. di Napoli,* s. III, v. XVI, p. 77-82 (1910)].

M. GANSS, *Einführung in die Vektoranalysis,* Zweite Auflage, Leipzig, 1909, Kap. IV; W. v. IGNATOWSKY, *Die Vektoranalysis* u. s. w. Leipzig, 1909, Bd. I, § 40; ont suivi M. Voigt.

De l'œuvre profonde de Gibbs subsiste tout ce qui devait naturellement survivre et tout le reste a disparu.

Les critiques de MM. Knott[1] et Wilson prouvent précisément que nous avons raison. Pour M. Knott il n'y a de salut que dans les quaternions[2]; pour M. Wilson que dans le système de Gibbs. Nous avons démontré que les quaternions sont insuffisants, et qu'en général le système de Gibbs est faux; nous prenons ce qu'il y a de bon des deux côtés et nous construisons un système qui peut vivre de lui-même ou dériver en entier du vaste système de Grassmann-Peano.

Naples-Turin, 24 juin 1910.

CHRONIQUE

Une encyclopédie des mathématiques élémentaires.

La Société italienne de mathématiques « Mathesis » entreprend la publication d'une encyclopédie de mathématiques élémentaires, qui, étant donné le plan général et le nom des collaborateurs, est appelée à rendre de grands services aux professeurs de l'enseignement secondaire.

Nous sommes en mesure de faire connaître déjà maintenant le plan général de l'Ouvrage, qui paraîtra sous la direction de MM. L. Berzolari, G. Vivanti, F. Gerbaldi, professeurs à l'Université de Pavie, de M. R. Bonola, professeur à l'Institut supérieur de Rome, et de M. E. Veneroni, professeur à l'Institut technique de Pavie.

L'encyclopédie comprendra trois volumes, contenant 44 monographies, dont voici les titres et les auteurs.

---

[1] M. Knott a publié dans l'*Ens. math.*, année XII, pp. 39-45 une Note à laquelle nous avons répondu. (Ibidem, pp. 47-53). On peut encore voir, du même auteur: *Hamilton's Quaternion Vector Analysis* [*Jahresbericht*, D. M. V., Bd. 14 (1905), p. 167-171] et un article de M. J.-V. Collins: *Correlation of vector analysis notations*. [*Ibidem*, pp. 164-165]. M. Collins a proposé pour le produit vectoriel la notation $a^{V} b$!!!

[2] Dans la *Mathem. Gazette*, vol. V (1910) pp. 284-288, nos deux livres font l'objet d'une analyse signée C. G. K. presque semblable à celle de M. C. G. Knott; car C. G. K. montre seulement de connaître les pseudo-quaternions, et non ceux de Hamilton, et d'avoir peu compris ce que nous avons écrit. Nous renvoyons l'auteur à notre réponse à M. Knott.