

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 13 (1911)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LA DÉTERMINATION DE LA COURBURE D'UNE LIGNE PLANE  
CONSIDÉRÉE COMME ENVELOPPE DE SES TANGENTES

**Autor:** Loria, Gino  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-13524>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SUR LA DÉTERMINATION  
DE LA COURBURE D'UNE LIGNE PLANE  
CONSIDÉRÉE COMME  
ENVELOPPE DE SES TANGENTES

---

En examinant la nouvelle édition allemande de l'excellent *Repertorium der höh. Mathematik* de M. E. PASCAL, dont deux volumes ont récemment paru, j'ai remarqué le manque de formules répondant à la question énoncée dans le titre de cette Note. Or on a besoin de ces formules dans plusieurs occasions, et comme je ne les ai pas trouvées dans les traités que j'ai examinés, je me propose de les établir. Elles offrent une application de la théorie classique des enveloppes, et pourraient trouver place dans toute exposition scolaire des applications géométriques du calcul différentiel.

I. — Soit

$$(1) \quad \varphi(u, v) = 0$$

l'équation plückérienne d'une courbe plane quelconque  $\Gamma$ ; cela signifie que cette courbe est l'enveloppe de la droite

$$(2) \quad ux + vy + 1 = 0$$

les paramètres  $u, v$  étant liés par l'équation (1); l'équation cartésienne de la courbe  $\Gamma$  est le résultat de l'élimination de  $u, v$  entre les équations (1), (2) et

$$\begin{vmatrix} x & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ y & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = 0 .$$

Si donc on pose pour abrégé

$$(3) \quad W = u \frac{\partial \varphi}{\partial u} + v \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

on aura les expressions suivantes pour les coordonnées d'un point quelconque P de la courbe  $\Gamma$  :

$$(4) \quad x = \frac{1}{W} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad y = \frac{1}{W} \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$u$  et  $v$  étant liées par la relation (1). La normale à la courbe  $\Gamma$  au point  $P(x, y)$  a évidemment pour équation (X et Y étant les coordonnées courantes)

$$(5) \quad v(X - x) - u(Y - y) = 0;$$

comme  $u, v$  satisfont à l'équation (1), l'enveloppe de cette droite a pour équation le résultat de l'élimination de  $u, v$  entre les équations (1), (5) et

$$(6) \quad \begin{vmatrix} -v \frac{\partial x}{\partial u} - (Y - y) + u \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ (X - x) - v \frac{\partial x}{\partial v} + u \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Dans cette formule  $x, y$  sont données par les équations (3), (4) et X, Y sont les coordonnées du *centre de courbure* C de la courbe  $\Gamma$  relatif au point  $P(x, y)$ , cela prouve que  $\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}$  est le rayon de courbure que nous cherchons. Or l'équation (5) donne

$$\frac{X - x}{u} = \frac{Y - y}{v} = \frac{R}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

ou bien

$$(7) \quad X - x = \frac{Ru}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad Y - y = \frac{Rv}{\sqrt{u^2 + v^2}};$$

par suite (6) devient

$$\begin{vmatrix} -\frac{Rv}{\sqrt{u^2 + v^2}} + u \frac{\partial y}{\partial u} - v \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{Ru}{\sqrt{u^2 + v^2}} + u \frac{\partial y}{\partial v} - v \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$R \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial u} + v \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ u & v & 0 \end{vmatrix}$$

Dans le second membre il faut substituer à  $x, y$  leurs expressions données par les équations (3), (4); le déterminant qui en résulte peut se transformer de manière qu'il prenne une forme plus simple; toute réduction faite, on trouve

$$(I) \quad R = \frac{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{\left( u \frac{\partial \varphi}{\partial u} + v \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^3} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & 0 \end{vmatrix}$$

C'est la formule qui résout la question que nous nous étions proposée.

II. — Des calculs analogues, mais plus simples, permettent de résoudre la même question lorsqu'on connaît les expressions des coordonnées plückériennes d'une tangente à la courbe considérée en fonction d'un paramètre  $t$ :

$$u = u(t), \quad v = v(t).$$

Dans ce cas, combinons l'équation

$$ux + vy + 1 = 0$$

avec sa dérivée par rapport à  $t$ , c'est-à-dire

$$u'x + v'y = 0;$$

si on pose pour abrégé

$$\Delta = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}, \quad \text{on aura} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} u & v \\ u'' & v'' \end{vmatrix},$$

et

$$(8) \quad x = -\frac{v'}{\Delta}, \quad y = \frac{u'}{\Delta};$$

$x$  et  $y$  étant les coordonnées d'un point quelconque P de la courbe  $\Gamma$  considérée. L'équation (5) représentera encore la normale en P à la courbe  $\Gamma$ ; pour en trouver l'enveloppe, combinons l'équation (5) avec sa dérivée

$$v'(X - x) - u'(Y - y) = vx' - uy' .$$

Mais, si on a recours aux équations (7), on peut écrire

$$R \frac{uv' - u'v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = vx' - uy' ;$$

et, en remplaçant  $x$ ,  $y$  par leurs expressions (8), on trouve, après quelques calculs,

$$(II) \quad R = \frac{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} (u'v'' - u''v')}{(uv' - u'v)^3} ,$$

relation qui sert à calculer le rayon de courbure de toute courbe déterminée par les expressions des coordonnées plückériennes des tangentes en fonction d'un paramètre.

III. — Je vais finir par une application de la formule que je viens d'établir. Considérons la courbe  $\Gamma$  représentée en coordonnées orthogonales comme il suit :

$$x = \xi(t) , \quad y = \eta(t) ,$$

et sa polaire réciproque  $\Pi$  par rapport au cercle

$$x^2 + y^2 = a^2 .$$

La courbe  $\Pi$  est l'enveloppe de la droite

$$x\xi + y\eta - a^2 = 0$$

dont les coordonnées plückériennes sont

$$u = -\frac{\xi(t)}{a^2} , \quad v = -\frac{\eta(t)}{a^2} .$$

Pour en trouver le rayon de courbure  $R_{\Pi}$ , on n'a qu'à appliquer la formule (II); on trouve de la sorte

$$R_{\Pi} = a^2 \frac{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}} (\xi'\eta'' - \xi''\eta')}{(\xi\eta' - \xi'\eta)^3} .$$

Or le rayon de courbure  $R_\Gamma$  de la courbe dont nous sommes partis est donné par la formule suivante

$$R_\Gamma = \frac{(\xi'^2 + \eta'^2)^{\frac{3}{2}}}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'} ;$$

donc on a

$$R_\Pi R_\Gamma = a^2 \left[ \frac{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\xi'^2 + \eta'^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi\eta' - \xi'\eta} \right]^3 .$$

Remarquons à présent que, si  $\mu$  est l'angle que la tangente en un point P de la courbe  $\Gamma$  fait avec le rayon vecteur OP on a

$$\sin \mu = \frac{\xi\eta' - \xi'\eta}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)(\xi'^2 + \eta'^2)}} ;$$

par conséquent, la relation précédente devient

$$(III) \quad R_\Pi R_\Gamma = \frac{a^2}{\sin^3 \mu} ,$$

relation très remarquable, découverte par A. MANNHEIM<sup>1</sup> et rappelée récemment par M. H. WIELEITNER<sup>2</sup> : il faut seulement observer que ces deux géomètres supposent  $a = 1$ , sans le dire explicitement, de manière qu'il est probable que quelque commençant trouve des difficultés à comprendre le sens d'une formule qui semble échapper à la loi d'homogénéité.

On peut ajouter que la formule (III) est encore vraie lorsque la conique directrice de la polarité est une des hyperboles équilatères suivantes :

$$x^2 - y^2 = a^2 , \quad -x^2 + y^2 = a^2 .$$

Gênes, 27 décembre 1910.

Gino LORIA.

<sup>1</sup> *Journal de Math. pures et appliquées*, II<sup>e</sup> sér., t. XI, 1866, p. 195.

<sup>2</sup> *Repertorium der höheren Geometrie*, I. Hälfte, 1910, p. 444.