Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1911)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA DÉTERMINATION DE LA COURBURE D'UNE LIGNE PLANE CONSIDÉRÉE COMME ENVELOPPE DE SES TANGENTES

Autor: Loria, Gino

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13524

SUR LA DÉTERMINATION DE LA COURBURE D'UNE LIGNE PLANE CONSIDÉRÉE COMME ENVELOPPE DE SES TANGENTES

En examinant la nouvelle édition allemande de l'excellent *Repertorium der höh. Mathematik* de M. E. Pascal, dont deux volumes ont récemment paru, j'ai remarqué le manque de formules répondant à la question énoncée dans le titre de cette Note. Or on a besoin de ces formules dans plusieurs occasions, et comme je ne les ai pas trouvées dans les traités que j'ai examinés, je me propose de les établir. Elles offrent une application de la théorie classique des enveloppes, et pourraient trouver place dans toute exposition scolaire des applications géométriques du calcul différentiel.

I. — Soit

$$\varphi(u, v) = 0 \tag{1}$$

l'équation plückérienne d'une courbe plane quelconque Γ; cela signifie que cette courbe est l'enveloppe de la droite

$$ux + vy + 1 = 0 \tag{2}$$

les paramètres u, v étant liés par l'équation (1); l'équation cartésienne de la courbe Γ est le résultat de l'élimination de u, v entre les équations (1), (2) et

$$\begin{vmatrix} x & \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \\ y & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = 0 .$$

Si donc on pose pour abréger

$$W = u\frac{\partial \varphi}{\partial u} + v\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \tag{3}$$

on aura les expressions suivantes pour les coordonnées d'un point quelconque P de la courbe Γ :

$$x = \frac{1}{W}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad y = \frac{1}{W}\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \tag{4}$$

u et v étant liées par la relation (1). La normale à la courbe Γ au point $P(x, y)$ a évidemment pour équation (X et Y étant les coordonnées courantes)

$$v(X - x) - u(Y - y) = 0 ; \tag{5}$$

comme u, v satisfont à l'équation (1), l'enveloppe de cette droite a pour équation le résultat de l'élimination de u, v entre les équations (1), (5) et

$$\begin{vmatrix} -v\dfrac{\partial x}{\partial u} - (Y - y) + u\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \\ (X - x) - v\dfrac{\partial x}{\partial v} + u\dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = 0 . \tag{6}$$

Dans cette formule x, y sont données par les équations (3), (4) et X, Y sont les coordonnées du *centre de courbure* C de la courbe Γ relatif au point $P(x, y)$, cela prouve que $\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}$ est le rayon de courbure que nous cherchons. Or l'équation (5) donne

$$\frac{X - x}{u} = \frac{Y - y}{v} = \frac{R}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

ou bien

$$X - x = \frac{Ru}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \qquad Y - y = \frac{Rv}{\sqrt{u^2 + v^2}} ; \tag{7}$$

par suite (6) devient

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{Rv}{\sqrt{u^2 + v^2}} + u\dfrac{\partial y}{\partial u} - v\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \dfrac{Ru}{\sqrt{u^2 + v^2}} + u\dfrac{\partial y}{\partial v} - v\dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = 0 ,$$

ou bien

$$\frac{R\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial u}+v\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)}{\sqrt{u^2+v^2}}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ u & v & 0\end{vmatrix}.$$

Dans le second membre il faut substituer à x, y leurs expressions données par les équations (3), (4); le déterminant qui en résulte peut se transformer de manière qu'il prenne une forme plus simple; toute réduction faite, on trouve

$$\text{(I)}\qquad R=\frac{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial u}+v\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^3}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} & 0\end{vmatrix}.$$

C'est la formule qui résout la question que nous nous étions proposée.

II. — Des calculs analogues, mais plus simples, permettent de résoudre la même question lorsqu'on connaît les expressions des coordonnées plückériennes d'une tangente à la courbe considérée en fonction d'un paramètre t:

$$u=u(t)\ ,\qquad v=v(t)\ .$$

Dans ce cas, combinons l'équation

$$ux+vy+1=0$$

avec sa dérivée par rapport à t, c'est-à-dire

$$u'x+v'y=0\ ;$$

si on pose pour abréger

$$\Delta=\begin{vmatrix}u\ , & v\\ u'\ , & v'\end{vmatrix},\qquad \text{on aura}\qquad \Delta'=\begin{vmatrix}u\ , & v\\ u''\ , & v''\end{vmatrix},$$

et

$$\text{(8)}\qquad x=-\frac{v'}{\Delta}\ ,\qquad y=\frac{u'}{\Delta}\ ;$$

x et y étant les coordonnées d'un point quelconque P de la courbe Γ considérée. L'équation (5) représentera encore la normale en P à la courbe Γ; pour en trouver l'enveloppe, combinons l'équation (5) avec sa dérivée

$$v'(X - x) - u'(Y - y) = vx' - uy' .$$

Mais, si on a recours aux équations (7), on peut écrire

$$R\frac{uv' - u'v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = vx' - uy' ;$$

et, en remplaçant x, y par leurs expressions (8), on trouve, après quelques calculs,

$$\text{(II)} \qquad R = \frac{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} (u'v'' - u''v')}{(uv' - u'v)^3} ,$$

relation qui sert à calculer le rayon de courbure de toute courbe déterminée par les expressions des coordonnées plückériennes des tangentes en fonction d'un paramètre.

III. — Je vais finir par une application de la formule que je viens d'établir. Considérons la courbe Γ représentée en cordonnées orthogonales comme il suit :

$$x = \xi(t) , \qquad y = \eta(t) ,$$

et sa polaire réciproque Π par rapport au cercle

$$x^2 + y^2 = a^2 .$$

La courbe Π est l'enveloppe de la droite

$$x\xi + y\eta - a^2 = 0$$

dont les coordonnées plückériennes sont

$$u = -\frac{\xi(t)}{a^2} , \qquad v = -\frac{\eta(t)}{a^2} .$$

Pour en trouver le rayon de courbure R_Π, on n'a qu'à appliquer la formule (II); on trouve de la sorte

$$R_\Pi = a^2 \frac{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}} (\xi'\eta'' - \xi''\eta')}{(\xi\eta' - \xi'\eta)^3} .$$

Or le rayon de courbure R_Γ de la courbe dont nous sommes partis est donné par la formule suivante

$$R_\Gamma = \frac{(\xi'^2 + \eta'^2)^{\frac{3}{2}}}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'} ;$$

donc on a

$$R_\Pi R_\Gamma = a^2 \left[\frac{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\xi'^2 + \eta'^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi\eta' - \xi'\eta} \right]^3 .$$

Remarquons à présent que, si μ est l'angle que la tangente en un point P de la courbe Γ fait avec le rayon vecteur OP on a

$$\sin\mu = \frac{\xi\eta' - \xi'\eta}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)(\xi'^2 + \eta'^2)}} ;$$

par conséquent, la relation précédente devient

$$\text{(III)} \qquad R_\Pi R_\Gamma = \frac{a^2}{\sin^3\mu} ,$$

relation très remarquable, découverte par A. MANNHEIM [1] et rappelée récemment par M. H. WIELEITNER [2] : il faut seulement observer que ces deux géomètres supposent $a = 1$, sans le dire explicitement, de manière qu'il est probable que quelque commençant trouve des difficultés à comprendre le sens d'une formule qui semble échapper à la loi d'homogénéité.

On peut ajouter que la formule (III) est encore vraie lorsque la conique directrice de la polarité est une des hyperboles équilatères suivantes :

$$x^2 - y^2 = a^2 , \qquad -x^2 + y^2 = a^2 .$$

Gênes, 27 décembre 1910. Gino LORIA.

---

[1] *Journal de Math. pures et appliquées,* IIe sér., t. XI, 1866, p. 195.
[2] *Repertorium der höheren Geometrie,* I. Hälfte, 1910, p. 444.