Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1911)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: J.-W. Young. — Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry. Prepared for publication with the cooperation of W.-W. Denton With a Note on the growth of algebraic symbolism by U.-G. Mitchell. — 1 vol. in-8°, 247 p. ; 1 s. 6 d. i Mac Millan & C°, New-York.

Autor: Masson, R.

d'introduction où il reprend notamment, avec une concision remarquable, la théorie des fonctions eulériennes. Il ne me semble pas exagéré de dire qu'on pourrait recommander son étude même à qui ignorerait la série hypergéométrique ; M. Nielsen conduirait sans doute le lecteur vers cette fonction, ses cas particuliers et ses applications avec un effort relativement faible. A. BUHL (Toulouse).

Andreas VOIGT. — **Theorie der Zahlenreihen und der Reihengleichungen.** — 1 vol. gr. in-8° de VIII-136 p.; 4 M.; G.-J. Göschen, Leipzig.

Ce volume offre un très intéressant essai de synthèse. L'auteur remarque avec raison qu'en mathématiques on considère beaucoup plus fréquemment que les nombres isolés, des ensembles de nombres satisfaisant tous à une même définition, ayant tous une même propriété. C'est d'ailleurs là l'idée fondamentale de la théorie des ensembles. Les ensembles arithmétiques ici considérés sont, en premier lieu, ceux qui résultent d'une suite d'entiers

$$\overset{0}{\nu}_0 , \quad \overset{0}{\nu}_1 , \quad \overset{0}{\nu}_2 , \quad \ldots , \quad \overset{0}{\nu}_s$$

puis d'une seconde suite

$$\overset{1}{\nu}_0 , \quad \overset{1}{\nu}_1 , \quad \overset{1}{\nu}_2 , \quad \ldots , \quad \overset{1}{\nu}_s ,$$

où $\overset{1}{\nu}_r = \overset{0}{\nu}_0 + \overset{0}{\nu}_1 + \ldots + \overset{0}{\nu}_r$, à laquelle on peut adjoindre une troisième suite par une définition analogue pour continuer ainsi indéfiniment. Une telle définition fait penser au triangle de Pascal et il s'agit bien, en effet, de quelque chose d'analogue mais de plus général. D'ailleurs les propriétés du binôme, ainsi que celles des coefficients de séries plus générales, sont retrouvées ensuite comme cas particulier des propriétés des tableaux à deux dimensions définies en premier lieu.

Après cette première partie nous rencontrons un problème plus profond et qu'on peut faire saisir au moyen d'une comparaison simple. La suite des nombres entiers étant définie, nous y intercalons des nombres fractionnaires fort distincts des premiers mais qu'on doit cependant relier avec eux. Or dans les séries de nombres construites dans la première partie de l'ouvrage, ne peut-on introduire d'autres nombres qui, en vertu de certaines conventions, pourront jouir de certaines propriétés des nombres primitifs ?

Je ne suis pas absolument sûr que de telles préoccupations soient toujours aussi originales que l'auteur paraît le croire, mais la contribution qu'il apporte à de telles idées justifie amplement la publication de cette œuvre aux notations élégantes, où bien des problèmes épars sont rassemblés d'une manière systématique. A. BUHL (Toulouse).

J.-W. YOUNG. — **Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry.** Prepared for publication with the cooperation of W.-W. DENTON. With a Note on the growth of algebraic symbolism by U.-G. MITCHELL. — 1 vol. in-8°, 247 p.; 1 s. 6 d.; Mac Millan & C°, New-York.

L'auteur a réuni dans ce volume 21 conférences qu'il a faites à l'Université de l'Illinois pendant l'été 1909. Ces études, présentées d'une manière très claire, seront lues avec intérêt par tous ceux qui se préoccupent de la question des principes fondamentaux de l'algèbre et de la géométrie. Elles sont données sous une forme élémentaire en ce sens qu'elles ne supposent chez le lecteur que des connaissances mathématiques relativement restreintes.

Par science mathématique M. Young entend : « Toute série de théorèmes tels que chacun des termes de la série, à partir d'un certain rang, soit une conséquence logique formelle d'un ou plusieurs des théorèmes qui le précèdent. » Cela nécessite à la base l'adoption d'un certain nombre de termes non définis et de quelques théorèmes non démontrés (axiomes ou postulats). La conception des géométries non-euclidiennes en découle tout naturellement, et à ce sujet M. Young reprend et développe la représentation d'un monde non-euclidien de M. Poincaré. Il en arrive ainsi à démontrer que la connaissance intuitive n'est pas suffisante pour caractériser avec précision le sens à attacher aux propriétés liées aux conceptions abstraites fondamentales de la géométrie et plus spécialement au postulat des parallèles d'Euclide. L'historique de ce postulat établit qu'il ne semble pas avoir satisfait Euclide lui-même au même titre que ses autres postulats.

Ce n'est cependant qu'au XVIIIe siècle que la question a été sérieusement reprise avec Saccheri, puis Gauss et surtout Lobatschewski et Bolyai. Selon M. Young, le choix des théorèmes pouvant être considérés comme des axiomes n'a rien de définitif; il passe en revue les définitions de quelques philosophes tels que Kant et Mill. Ensuite, partant de deux termes non définis et de l'expression de sept principes, il en déduit d'une manière logique de nouveaux principes et démontre qu'ils satisfont aux conditions nécessaires de conséquence, indépendance et catégorisme, dont il a donné la définition; il conclut que « aucun terme ne doit être explicitement défini s'il ne peut l'être en termes représentant des idées notablement plus simples que le terme à définir. »

Cette première partie met en lumière le fait que la signification généralement attachée à des principes fondamentaux tels que la distance et la droite manque de précision, et que les axiomes et postulats de la géométrie ne peuvent être acceptés comme des vérités évidentes par elles-mêmes. Suit une discussion serrée des divers principes fondamentaux des mathématiques en commençant par celui de classe qui amène, sans nouvelle supposition, aux nombres cardinaux, puis aux classes finies et infinies. Les éléments d'une classe sont susceptibles, soit de certaines *relations*, soit de certaines *opérations* au moyen desquelles on peut les caractériser. A la catégorie des relations appartient entre autres l'*ordre*. Pour chaque nouvelle propriété l'auteur vérifie qu'elle satisfait aux conditions de conséquence, indépendance et catégorisme déjà établies. A la notion de classe considérée comme notion fondamentale par elle-même est adjointe la notion de classe dans ses rapports avec la relation d'ordre, puis avec la notion d'opération, ce qui amène à la notion de groupe qui est, après celle de classe et de correspondance, l'une des plus importantes parmi les principes fondamentaux des mathématiques.

Trois chapitres sont consacrés à l'étude historique et logique de la notion de nombre ; d'abord réel, positif, entier puis fractionnaire, irrationnel (à ce sujet l'auteur rappelle le postulat de Dedekind), enfin le nombre négatif et le nombre complexe.

Quoiqu'il soit fait mention de ces nombres à des périodes assez reculées, le nombre négatif, par exemple, se rencontre déjà dans l'ouvrage hindou de Bhaskara en 1150 av. J.-C., ce n'est guère qu'au commencement du XIXe siècle que la vraie nature de ces nombres a été reconnue et que leur théorie a été placée sur une base strictement logique. L'application de la notion de nombre aux diverses opérations conduit l'auteur à l'interprétation géométrique, l'analyse vectorielle et les quaternions.

Dans son 13e chapitre, M. Young abandonne l'algèbre pour s'occuper plus spécialement des principes à la base de la géométrie en se limitant à ce qui concerne la déduction logique des théorèmes de géométrie euclidienne, sans appel à l'intuition. La différence et les rapports entre la géométrie projective et la géométrie métrique sont illustrés par le théorème de Desargues.

L'auteur estime que les groupes de principes fondamentaux répondant le mieux aux exigences de l'instruction élémentaire sont ceux de M. Hilbert et de M. Pieri.

M. Hilbert se base sur une *classe* d'éléments non définis, les points, et ce que l'on peut considérer comme des sous-classes de celle-ci, les droites et les plans. Il divise son groupe de principes en cinq sous-séries, l'alignement, la congruence, l'axiome des parallèles et la continuité.

M. Pieri a comme seuls termes non définis la notion de point et celle de déplacement rigide; il en déduit la définition de la droite, du plan, etc.

Les postulats sur lesquels M. Young base son étude de l'espace à quatre dimensions sont choisis de telle sorte que l'espace à trois dimensions de la géométrie ordinaire n'en est qu'un cas particulier.

Reprenant l'étude de la géométrie et de l'algèbre à la lumière des résultats obtenus, l'auteur conclut que, du point de vue abstrait formel où il se place, les principes constituant l'algèbre ordinaire et la géométrie métrique ordinaire coïncident absolument, l'une contient l'autre. Les notions de variable, de fonction, de limite se déduisent également de ces principes fondamentaux, ainsi que la notion d'infini.

Le volume se termine par une intéressante notice historique de M. U.-G. Mitchell sur le développement du symbolisme algébrique.

R. Masson (Genève).

L. Zoretti. — **Leçons sur le prolongement analytique** professées au Collège de France. — 1 vol. gr. in-8° de VI-116 p. ; 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Ces leçons sur le prolongement analytique attachent une importance exclusive à la position du problème ; elles en signalent les difficultés, étudient leur nature et ouvrent de vastes horizons aux chercheurs. La classification des fonctions analytiques, la possibilité de leur prolongement dépendant de l'ensemble de leurs singularités, l'auteur a commencé par rappeler les parties les plus essentielles de la théorie des ensembles. Son objet principal est d'attaquer l'étude des fonctions multiformes en suivant surtout MM. Poincaré et Painlevé. Au fond, c'est l'étude des équations différentielles qui a inspiré ces deux éminents géomètres. Le premier a construit ses fameuses fonctions fuchsiennes qui sont encore des fonctions présentant des propriétés exactes plus ou moins comparables à la périodicité, le second a entrepris l'étude d'équations différentielles sans se soucier de savoir d'avance si les intégrales présenteraient ou non une régularité quelconque et, cependant, ils se sont rejoints, en quelque sorte, ce qui semble prouver que, quelque compliqué que soit l'écheveau des singularités d'une fonction analytique, les tentatives de classification ne sont pas menacées d'un éternel échec.

M. Zoretti paraît essayer de réunir surtout les bases de toutes ces recherches; par instant on aimerait trouver plus de résultats acquis, mais