Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1911)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTE COMPLÉMENTAIRE SUR LES FONCTIONS DE MESURE
Autor: Combebiac, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13543

NOTE COMPLÉMENTAIRE SUR LES FONCTIONS DE MESURE

La lecture de la Note précédente, que son auteur à eu l'amabilité de me communiquer, a ramené mon attention sur des notes succinctes que j'avais écrites, après la publication de mon article sur la mesure, en vue d'une ébauche d'une théorie des grandeurs. J'ai pensé qu'il ne serait peut-être pas sans intérêt de faire suivre la très intéressante étude de M. Brouwer de ces notes, revues et mises au net, qui, bien que traitant la même question, me paraissent s'écarter suffisamment des procédés de démonstration adoptés par ce savant pour ne pas faire double emploi.

Posons les conditions ou axiomes suivants.

I. $u = F(x, y)$ *est une fonction uniforme, nulle part constante et satisfaisant dans tout le champ des variables à l'équation fonctionnelle*

$$F(x, z) = \Phi[F(x, y), F(y, z)] ,$$

où Φ *désigne une fonction de deux variables.*

II. *En vertu de l'équation* $u = F(x, y)$, *chacune des variables* x *et* y *est une fonction uniforme de l'autre et de* u.

III. *Le champ* Y *de la variable* y *est contenu dans le champ* X *de la variable* x.

IV. $F(x, y)$ *est croissante comme fonction de* y *et décroissante comme fonction de* x.

V. $F(x, y)$ *est continue comme fonction de chacune de ses variables.*

1. $\Phi(u, v)$ *est croissante et continue comme fonction de chacune de ses variables.*

En effet, si u et v désignent des valeurs quelconques des deux variables et y_0 une valeur déterminée du champ Y, il existe toujours (II et III) des nombres x et z tels que l'on a

$$u = F(x, y_0) , \qquad v = F(y_0, z) ,$$

où u est une fonction décroissante de x, et v une fonction croissante de z (IV), de sorte que x est une fonction de u décroissante et continue[1] et que, de même, z est une fonction de v croissante et continue; comme, d'autre part, on a (I)

$$\Phi(u, v) = F(x, z)$$

et que $F(x, z)$ est continue comme fonction de chacune des variables (V), il en résulte bien que $\Phi(u, v)$ possède les propriétés spécifiées dans l'énoncé.

Corollaire. $\Phi(u, u)$ *est une fonction croissante de* u.

On a bien, en effet, pour ε positif,

$$\Phi(u + \varepsilon, u + \varepsilon) < \Phi(u + \varepsilon, u) < \Phi(u, u) .$$

2. $F(x, x)$ *a une valeur constante.*

On a toujours, en effet (I)

$$F(x, y) = \Phi[F(x, x), F(x, y)] .$$

Pour une valeur déterminée v_0 de $F(x, y)$, à toute valeur de x correspond toujours (II) une valeur de y satisfaisant à la relation

$$v_0 = F(x, y) .$$

On aura donc pour toute valeur de x

$$v_0 = \Phi[F(x, x), v_0)] ;$$

mais, $\Phi(u, v_0)$ étant une fonction croissante de u (1), une de ses valeurs, soit v_0, ne peut correspondre à plus d'une seule valeur de u, de sorte que la relation précédente ne peut être satisfaite que pour une seule valeur de $F(x, x)$, qui est donc bien indépendante de x.

3. $\Phi(u, v)$ *satisfait à l'équation fonctionnelle des groupes paramétraux :*

$$\Phi[u_1, \Phi(u_2, u_3)] = \Phi[\Phi[u_1, u_2], u_3] .$$

En effet, x_0 désignant un nombre arbitrairement choisi dans le champ X, il existe toujours dans le champ Y (II et III) trois nombres x_1, x_2 et x_3 qui appartiennent aussi au champ X (IV) et qui sont tels que l'on aura

$$u_1 = F(x_0, x_1) , \qquad u_2 = F(x_1, x_2) , \qquad u_3 = F(x_2, x_3) ;$$

par conséquent, en appliquant de deux manières la relation fon-

[1] L'inverse d'une fonction monotone (à fortiori, d'une fonction croissante ou décroissante) est évidemment une fonction croissante ou décroissante et continue partout où la continuité conserve une signification, c'est-à-dire où le champ est dense en lui-même.

damentale (I), on aura

$$F(x_0, x_3) = \begin{cases} \Phi[F(x_0, x_1), F(x_1, x_3)] = \Phi[u_1, \Phi(u_2, u_3)] \\ \Phi[F(x_0, x_2), F(x_2, x_3)] = \Phi[\Phi(u_1, u_2), u_3] . \end{cases}$$

Il en résulte bien la relation à établir.

4. $F(x, y)$ *est une fonction croissante et continue d'une expression de la forme* $f(y) - f(x)$, *où* $f(x)$ *est une fonction croissante et continue.*

x_0 et x_1 désignant deux nombres du champ X tels que $x_0 < x_1$, il existe toujours (II et III) une suite de nombres $x_2, x_3, \ldots x_\nu, \ldots$ tels que l'on a

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu < x_{\nu+1} < \ldots$$

$$F(x_0, x_1) = F(x_1, x_2) = \ldots = F(x_\nu, x_{\nu+1}) = \ldots$$

Si l'on pose

$$x_0 = \varphi(0) , \qquad x_1 = \varphi(1) , \ldots \qquad x_\nu = \varphi(\nu) , \ldots$$

les égalités précédentes pourront s'écrire

$$F[\varphi(0), \varphi(1)] = F[\varphi(\nu), \varphi(\nu+1)] ,$$

avec $\varphi(\nu) < \varphi(\nu + 1)$.

On a d'ailleurs (2)

$$F[\varphi(0), \varphi(0)] = F[\varphi(p), \varphi(p)] ,$$

égalité qui est évidemment un cas particulier (pour $\nu = 0$) de la suivante

$$(1) \qquad F[\varphi(0), \varphi(\nu)] = F[\varphi(p), \varphi(p+\nu)] .$$

Cette dernière sera donc établie si l'on démontre que, vraie pour un nombre entier quelconque ν, elle doit l'être aussi pour $\nu + 1$; c'est bien en effet ce qui résulte des égalités suivantes, qui sont des conséquences de l'égalité (1) et de la propriété (I),

$$\begin{aligned} F[\varphi(0), \varphi(\nu+1)] &= \Phi\left\{ F[\varphi(0), \varphi(\nu)], F[\varphi(\nu), \varphi(\nu+1)] \right\} \\ &= \Phi\left\{ F[\varphi(0), \varphi(\nu)], F[\varphi(0), \varphi(1)] \right\} \\ &= \Phi\left\{ F[\varphi(p), \varphi(p+\nu), F[\varphi(p+\nu), \varphi(p+\nu+1)] \right\} \\ &= F[\varphi(p), \varphi(p+\nu+1)] . \end{aligned}$$

La fonction de x $F(x, x_1) - F(x_0, x)$ est continue (V) et prend, pour $x = x_0$ et $x = x_1$, des valeurs égales et de signes contraires (2); elle s'annule donc dans l'intervalle (x_0, x_1) en un point, qui pourra être désigné par $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, de sorte que l'on pourra écrire

$$F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right] = F\left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right),\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right] \qquad \text{avec} \qquad \varphi(0) < \varphi\left(\frac{1}{2}\right) < \varphi(1)\ .$$

En opérant de même pour les autres intervalles, on pourra aussi écrire

$$F\left[\varphi(\nu),\ \varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right] = F\left[\varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right),\ \varphi(\nu + 1)\right]$$

avec

$$\varphi(\nu) < \varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right) < \varphi(\nu + 1)\ .$$

On a d'ailleurs, d'après I et la formule (1), évidemment applicable aux nouveaux intervalles,

$$\begin{aligned}\Phi\left\{F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right],\ F\left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right),\ \varphi(1)\right]\right\} &= F[\varphi(0),\ \varphi(1)] \\ = F[\varphi(\nu),\ \varphi(\nu + 1)] = \Phi\left\{F\left[\varphi(\nu),\ \varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right]\right.&, \\ \left.F\left[\varphi(\nu),\ \varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}&\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\Phi\left\{F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right],\ F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\} = \Phi\left\{F\left[\varphi(\nu),\ \varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right]\right.&, \\ \left.F\left[\varphi(\nu),\ \varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}&\ .\end{aligned}$$

La fonction $\Phi(u, u)$ de u, étant croissante (corol. de 1), admet toujours une inverse uniforme; de l'égalité précédente, eu égard à la définition de $\varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)$ (pour $\nu = 0, 1, \ldots$), on déduit donc les égalités suivantes

$$\begin{aligned}F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right] = F\left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right),\ \varphi(1)\right] &= F\left[\varphi(\nu),\ \varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= F\left[\varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right),\ \varphi(\nu + 1)\right]\ .\end{aligned}$$

En opérant de même sur chacun des intervalles déterminés par les nombres de la suite $0, \frac{1}{2}, 1, \ldots, \nu, \nu + \frac{1}{2}, \nu + 1$, on établira aussi l'égalité des expressions définies par les extrémités des nouveaux intervalles, et en continuant ainsi, on déterminera, pour deux nombres entiers a et n quelconques, un nombre, qui pourra être désigné par $\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right)$, de sorte que l'on aura les relations suivantes

$$(2) \qquad F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right] = F\left[\varphi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right),\ \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)\right]$$
$$= F\left[\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right),\ \varphi\left(\frac{a}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right] = F\left[\varphi\left(\frac{a}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right),\ \varphi\left(\frac{a+1}{2^n}\right)\right]$$

avec

$$\varphi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) < \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Les intervalles de chacune des divisions ainsi définies possèdent évidemment toutes les propriétés établies pour ceux de la division qui est définie par les nombres entiers ; on doit donc avoir, a, b et n étant des nombres entiers quelconques, une relation toute semblable à (1), savoir :

$$(1)' \qquad F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{b}{2^n}\right)\right] = F\left[\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right),\ \varphi\left(\frac{a+b}{2^n}\right)\right]$$

avec

$$\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right) < \varphi\left(\frac{a+b}{2^n}\right);$$

comme il est d'ailleurs toujours possible de réduire à la même puissance les dénominateurs de deux fractions dyadiques quelconques, la relation précédente peut aussi s'écrire

$$(1)'' \qquad F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{b}{2^m}\right)\right] = F\left[\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right),\ \varphi\left(\frac{a}{2^n}+\frac{b}{2^m}\right)\right].$$

On a ainsi défini une fonction pour un ensemble dense partout de nombres positifs, savoir ceux qui sont de la forme $\frac{a}{2^n}$ (nombres dyadiques), et cette fonction est croissante, d'après l'inégalité précédente. Si σ et σ' désignent deux de ces nombres, soit

$$\sigma = \frac{a}{2^n}, \qquad \sigma' = \frac{a}{2^n} + \frac{b}{2^m},$$

on aura

$$F[\varphi(\sigma),\ \varphi(\sigma')] = F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{b}{2^m}\right)\right]$$

ou enfin

$$\text{(3)} \qquad F[\varphi(\sigma), \varphi(\sigma')] = F[\varphi(0), \varphi(\sigma' - \sigma)],$$

de sorte que $F[\varphi(\sigma), \varphi(\sigma')]$ est une fonction croissante de $\sigma' - \sigma$.

Un nombre positif quelconque σ peut toujours, comme on sait, être défini comme somme d'un nombre entier et d'une fraction dyadique, c'est-à-dire comme limite d'une suite croissante de nombres de la forme $a_0, \frac{a_1}{2}, \dots, \frac{a_n}{2^n}, \dots$, soit

$$\sigma = \nu + \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \dots + \frac{z_n}{2^n} + \dots = \lim_{n=\infty} \left(\frac{a_n}{2^n}\right),$$

où $z_1, z_2, \dots$ désignent les nombres 0 ou 1.

La fonction $\varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ étant croissante et bornée, toute suite de valeurs telles que $\varphi(a_0), \varphi\left(\frac{a_1}{2}\right), \dots$ a une limite, et l'on pourra toujours, par conséquent, définir, pour tout le champ numérique positif, une fonction liée à $\varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ par la condition suivante

$$\varphi(\sigma) = \lim_{n=\infty} \varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right).$$

On établira d'ailleurs facilement, eu égard aux propriétés connues des limites et des fonctions continues d'une variable, que la formule (3) est applicable à la fonction $\varphi(\sigma)$ ainsi *étendue*. Enfin, les moyens qui ont été employés pour obtenir ces résultats sont évidemment applicables au champ numérique négatif à partir de $x_0 = \varphi(0)$; on pourra donc toujours supposer que la fonction $\varphi(\sigma)$ est définie pour le champ numérique complet. Elle admet une inverse croissante $\sigma = f(x)$, qui est définie pour l'ensemble X_1 (portion de X) des valeurs de $\varphi(\sigma)$ et l'on pourra, par conséquent, pour deux nombres x et x' quelconques de X_1, poser

$$\text{(3')} \qquad F(x, x') = F\left\{\varphi(0), \varphi[f(x') - f(x)]\right\}.$$

Chacune des propriétés suivantes peut ou non être satisfaite.

1° La suite $\left\{\varphi(\nu)\right\}$ s'étend sur le champ X;

2° L'ensemble X_1 des nombres $\left\{\varphi(\sigma)\right\}$ est dense sur la portion du continu numérique sur laquelle il s'étend (il se confondra alors évidemment avec cette portion, car il est lui-même continu).

En ce qui concerne la première propriété, la suite $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, ..., étant croissante, admet toujours une limite x_ω finie ou infinie, soit

$$x_\omega = \lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu) = \lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu+1) .$$

De la formule (1) et de la proposition 2 il résulte que l'on ne peut avoir

$$\lim_{\nu=\infty} F[\varphi(\nu), \varphi(\nu+1)] = F(x_\omega, x_\omega) = u_0 ,$$

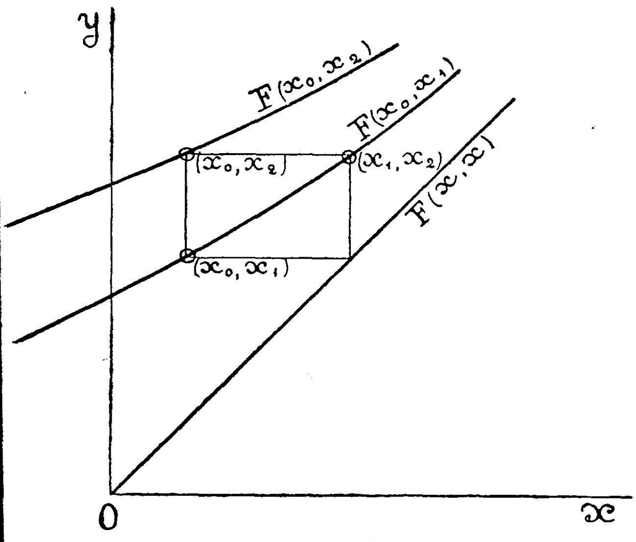

Fig. 1.

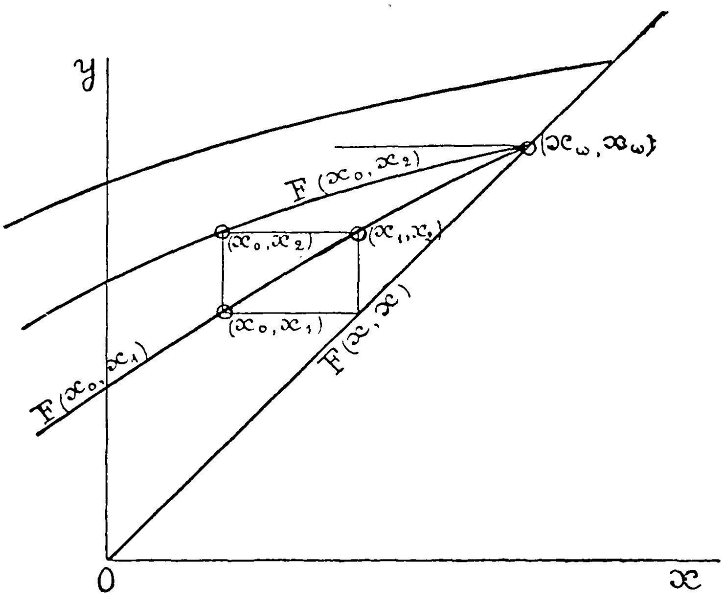

Fig. 2.

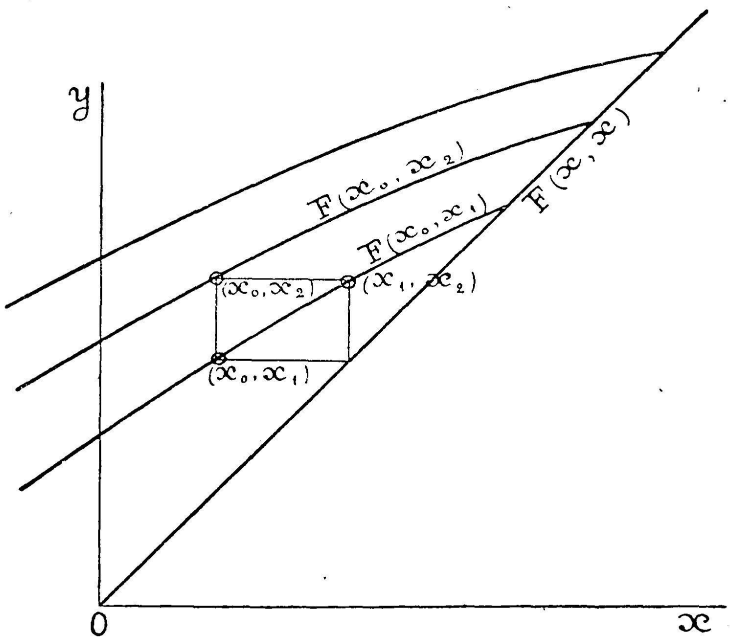

Fig. 3.

de sorte que, si x_ω est finie, la fonction $F(x, y)$ ne sera pas continue au point (x_ω, x_ω), ce qui n'est d'ailleurs pas incompatible avec sa continuité comme fonction de chacune de ses variables.

Deux cas peuvent alors se présenter, selon que $x_\omega = \lim \varphi(\nu)$ possède ou non la même valeur lorsque $\varphi(1)$ parcourt le champ X; dans le premier cas, x_ω est à la base supérieure de ce champ, et la propriété archimédienne sera satisfaite; dans le second cas, elle ne le sera pas, et il pourra se faire ou que le champ soit décomposable en champs partiels dans chacun desquels cette propriété sera satisfaite, ou qu'à toute valeur u de la valeur corresponde une valeur x_ω définie par les relations suivantes :

$$u = \mathrm{F}[\varphi(0)\,,\ \varphi(1)] = \ldots = \mathrm{F}[\varphi(\nu)\,,\ \varphi(\nu+1)] = \ldots\,,\quad x_\omega = \lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu)\ ;$$

dans les deux cas, la propriété archimédienne ne sera pas satisfaite dans toute sa généralité. Les trois figures ci-contre représentent les trois cas.

On va établir une propriété importante de l'ensemble $\{\varphi(\sigma)\}$; mais, pour simplifier la démonstration, on la fera sur une nouvelle fonction, qui sera également désignée par $\varphi(\sigma)$ et qui sera définie par la relation $\varphi(\sigma) = u = \mathrm{F}(x_0, x)$; cette nouvelle fonction a évidemment les mêmes propriétés par rapport au champ U de la variable u que la fonction primitive par rapport au champ X, et l'on pourra, par conséquent, rapporter toujours à l'une les propriétés établies pour l'autre.

La nouvelle fonction est évidemment, comme la première, croissante, et l'on établira facilement les relations

$$\Phi[\varphi(0)\,,\ u] = u\ ,\qquad \Phi[\varphi(\sigma)\,,\ \varphi(\sigma')] = \varphi(\sigma+\sigma')\ .$$

5. *Etant donnés un nombre* u *de* U *et un nombre entier positif quelconque* n, *il existe toujours dans* U, *entre* u_0 *et* u, *un nombre* ε *tel que, si l'on définit une fonction* $\varphi_\varepsilon(\nu)$ *par les relations*

$$\varphi_\varepsilon(0) = u_0\ ,\quad \varphi_\varepsilon(1) = \varepsilon\ ,\quad \varphi_\varepsilon(\nu+1) = \Phi[\varphi_\varepsilon(\nu)\,,\ \varphi_\varepsilon(1)] = \Phi[\varphi_\varepsilon(1)\,,\ \varphi_\varepsilon(\nu)]\ ,$$

on aura

$$\varphi_\varepsilon(n) \leqq u\ .$$

En effet, si U contient un nombre ε tel qu'on ait, pour toute valeur de ν, $\varphi_\varepsilon(\nu) < u$, ε possèdera bien la propriété requise.

Dans le cas contraire, pour un nombre quelconque α de U, il existera un nombre entier positif ν tel qu'on aura $\varphi_\alpha(\nu) \leqq u < \varphi_\alpha(\nu+1)$. Si, en outre, on prend α dans l'intervalle (u_0, u), il existera toujours un nombre α_1 de U tel qu'on aura (II)

$$u = \Phi(\alpha\,,\ \alpha_1)$$

et, par suite,

$$\Phi(\alpha\,,\ \alpha_1) < \varphi_\alpha(\nu+1) = \Phi[\alpha\,,\ \varphi_\alpha(\nu)]\ ;$$

d'où il résulte (1) : $u_0 < \alpha_1 < \varphi_\alpha(\nu) \leqq u$.

Si U contient un nombre ε tel qu'on ait, pour toute valeur entière de ν, $\varphi_\varepsilon(\nu) \leqq \alpha$, on aura *à fortiori* $\varphi_\varepsilon(\nu) \leqq u$, et la proposition sera bien ainsi satisfaite. Dans le cas contraire, on pourra toujours obtenir deux nombres α' et α_2 de D compris entre u_0 et α et tels qu'on aura $\alpha_1 = \Phi(\alpha', \alpha_2)$. En répétant ce procédé, on parviendra soit à un nombre ε qui satisfera à la proposition pour toute valeur de ν, soit à des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha^n, \alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(n-1)}$ tous compris entre u_0 et u et tels qu'on aura

$$\alpha^{(p)} = \Phi[\alpha^{(p+1)}, \alpha_{p+2}] .$$

Le plus petit ε des nombres $\{\alpha_p\}$ ou, si ces nombres sont égaux, leur valeur commune satisfera évidemment à la relation $\varphi_\varepsilon(n) \leqq u$ et, par conséquent, la proposition est bien établie.

Cette propriété correspond à la propriété classique des grandeurs mesurables qui, combinée à la propriété archimédienne, permet de définir la mesure d'une grandeur quelconque ou plus généralement le rapport de deux grandeurs quelconques de la même espèce. En appliquant ici l'un des procédés classiques employés à cet effet, on parviendrait facilement à faire correspondre à un nombre quelconque u de U et, par conséquent, à un nombre quelconque x de X un nombre de l'ensemble $\varphi(\sigma)$. Il résulte de là que l'axiome d'Archimède convenablement approprié est le seul qui doive être ajouté à ceux déjà posés pour que la fonction $F(x, y)$ définisse bien un système de mesure pour le champ X. Cette conclusion n'est d'ailleurs pas particulière aux continus linéaires. Elle est en effet établie par une méthode générale dans une *Ebauche d'une théorie des grandeurs*, que je me propose de publier incessamment.

Nouvelle note complémentaire.

Entre les résultats de M. Brouwer et les miens il existe une divergence qui peut s'exprimer, avec ma notation, de la manière suivante : M. Brouwer établit, en contradiction avec certaines des propriétés dont j'ai admis la possibilité, que l'ensemble des valeurs $\left\{ \varphi\left(\frac{a}{2^n}\right) \right\}$ est toujours dense sur tout le champ U de la variable u, autrement dit que *la fonction* $\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right)$ *(et, par suite,* $\varphi(\sigma)$*) est continue et prend toutes les valeurs de ce champ.* Je dois reconnaître que c'est M. Brouwer qui a raison, et en voici même une autre démonstration notablement plus longue que celle qu'a donnée ce savant, mais qui satisfera peut-être mieux ceux qui, comme moi, sont insuffisamment familiarisés avec les procédés récents de la théorie des variétés numériques selon MM. Cantor et Schœnflies.

La suite décroissante $\left\{ \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) \right\}$ a toujours une limite u_0', qui est aussi sa borne inférieure et qui ne peut être inférieure à $u_0 = \varphi(0)$; si elle ne lui est pas identique, on a donc (corol. de 1 et prem. des relations 4) $u_0' = \Phi(u_0, u_0') < \Phi(u_0', u_0')$ et l'on devra toujours avoir à partir d'une certaine valeur de n

$$u_0' < \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) < \varphi(u_0', u_0),$$

par suite

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \Phi\left[\varphi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right), \varphi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right] < \Phi(u_0', u_0')$$

et enfin (corol. de 1),

$$\varphi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) < u_0',$$

de sorte que u_0' ne serait pas la borne inférieure de $\left\{ \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) \right\}$. On doit donc bien avoir

$$\lim_{n=\infty} = \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) = \varphi(0),$$

c'est-à-dire que la fonction est bien continue pour $\sigma = 0$; cette propriété s'étend facilement à tous les nombres en vertu de la relation (1)′, de sorte que la fonction $\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right)$ et, par suite, la fonction $\varphi(\sigma)$ sont bien continues.

D'autre part, la suite infinie et croissante $\{\varphi(\nu)\}$ a toujours une limite (finie ou infinie) u_ω, qui est aussi sa borne supérieure; si ce nombre appartenait au champ U, celui-ci devrait aussi contenir un nombre u_ω' inférieur à u_ω et tel qu'on aurait

$$\Phi(u_\omega', u_\omega') = u_\omega;$$

et l'on aurait toujours, à partir d'une certaine valeur de ν

$$u_\omega' < \varphi(\nu) < u_\omega$$

et, par conséquent (corol. de 1)

$$\varphi(2\nu) = \Phi[\varphi(\nu), \varphi(\nu)] > \Phi(u_\omega', u_\omega') = u_\omega;$$

u_ω ne serait donc pas la borne supérieure de $\{\varphi(\nu)\}$, ce qui est contradictoire avec ce qui a été déjà établi.

Il résulte de là que $\varphi(\sigma)$ est une fonction continue, croissante et prenant toutes les valeurs du champ U; ce champ ne peut d'ailleurs être *limité* (clos) à droite et, si $\varphi(\sigma)$ est bornée supérieurement, il en sera de même de ce champ, mais celui-ci ne contiendra jamais sa borne, de sorte qu'il ne se distinguera pas des champs s'étendant à l'infini.

La proposition 5 ne perd d'ailleurs rien de son intérêt; sa démonstration n'implique en effet nullement que $\Phi(u, v)$ soit une fonction croissante de sa première variable, ni que l'équation $w = \Phi(u, v)$ définisse la variable u comme fonction de v et de w, propriétés qui correspondent évidemment à celles-ci : $F(x, y)$ est décroissante comme fonction de x et l'équation $u = F(x, y)$ définit x comme fonction de y et de u. Il resterait donc à déterminer les métriques dont sont encore susceptibles, ces conditions écartées, les continus linéaires, métriques auxquelles est aussi applicable la proposition 5.

G. Combebiac (Limoges).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Notations rationnelles pour le système vectoriel[1].

13. — *Extrait d'une lettre de* M. E.-B. Wilson.

A propos d'une Note de MM. Burali-Forti et Marcolongo.

Je viens de lire dans l'*Enseignement mathématique* (XIII^e^ année, pp. 138-148) la réponse que MM. Burali-Forti et Marcolongo font à mon compte rendu des ouvrages *Elementi di Calcolo vettoriale* et *Omografie vettoriali* dans le *Bull. of the American Mathem. Society* (vol. XVI, pp. 410-436). Elle m'intéresse comme tout ce que l'on écrit sur l'analyse vectorielle, et, par la façon dont ils répondent à mon simple compte rendu qui ne demandait ni méri-

---

[1] Voir l'*Ens. math.*, XI^e^ année, 1909, n° du 15 janvier, p. 41-45; n° du 15 mars, p. 124-134; n° du 15 mai, p. 211-227; n° du 15 juillet, p. 381; n° du 15 novembre, p. 459-466. — XII^e^ année, n° du 15 janvier 1910, p. 39-54. — XIII^e^ année, n° du 15 mars 1911, p. 131-148.