

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 13 (1911)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOUVELLES DÉMONSTRATIONS D'UN THÉORÈME RELATIF AU CERCLE DES NEUF POINTS  
**Autor:** Sawayama, Y.  
**Kapitel:** 8e Démonstration.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-13522>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

est que ce point soit le point d'intersection de la droite AC et du cercle A'B'C'; donc les angles que fait la droite XY avec chacune des deux droites  $\alpha E$  et  $\alpha B'$  sont égaux entre eux.

Donc :

$$\alpha J' = \alpha J = \alpha A' .$$

D'où, en suivant la même marche que dans la 6<sup>e</sup> démonstration, on pourra prouver que les deux cercles A'B'C' et XYZ se touchent entre eux.

### 8<sup>e</sup> Démonstration.

VIII. — *Lemme.* — En désignant par  $a, b, c$  les trois côtés d'un triangle ABC, par R le rayon du cercle circonscrit, par  $r$  et I le rayon et le centre du cercle XYZ, on a

$$\overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2r^2 \mp 4Rr .$$

(Pour cette démonstration, on pourra choisir un quelconque des trois cercles exinscrits pour le cercle XYZ.)

Soient  $\beta, \gamma$  les points où deux droites BI et CI coupent à nouveau la circonférence ABC. Soient encore D, E les pieds respectifs des perpendiculaires abaissées de  $\beta$  sur AC et de  $\gamma$  sur AB; et K, L, M les points de rencontre de  $\beta\gamma$  avec AC, AB, AI. (Fig. 7.)

Les droites  $\beta A$  et  $\gamma A$  étant respectivement égales aux droites  $\beta I$  et  $\gamma I$ , la droite  $\beta\gamma$  est perpendiculaire à la droite AI et divise cette droite en deux parties égales; donc les deux triangles  $\beta AM$  et  $A\gamma E$  sont semblables et l'on a :

$$\frac{AM}{\gamma E} = \frac{\beta A}{A\gamma} .$$

De plus, la similitude des deux triangles  $\beta DA$  et  $AM\gamma$  donne :

$$\frac{\beta D}{AM} = \frac{\beta A}{A\gamma} .$$

Des deux propositions précédentes, on tire <sup>1</sup> :

$$\frac{\beta D}{AM} = \frac{AM}{\gamma E} , \quad \text{d'où} \quad \beta D \cdot \gamma E = \overline{AM}^2 .$$

Donc, on a :

$$4\beta D \cdot \gamma E = \overline{AI}^2 \quad (1)$$

<sup>1</sup> Quand I est le centre du cercle inscrit, cette relation (1) a déjà été donnée par l'un des mathématiciens de notre pays, nommé SHIRAIISHI NAGATADA dans son ouvrage publié en 1827 sous le titre de *Shaméi Sampu*.

Maintenant soit  $\alpha$  le nouveau point de rencontre de la droite AI et du cercle ABC et appelons respectivement  $\mu, \mu', \mu''$  la distance de  $\alpha$  à la corde BC et les distances  $\beta D$  et  $\gamma E$ . D'après les résultats précédents :

$$\Sigma \overline{AI}^2 = 4 \Sigma \mu' \mu'' .$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma \overline{AI}^2 &= (\Sigma \mu)^2 - \Sigma \mu^2 = (\Sigma \mu)^2 - \Sigma (\overline{\alpha B}^2 - \frac{1}{4} a^2) \\ &= \frac{1}{4} \Sigma a^2 + (\Sigma \mu)^2 - 2R \Sigma \mu = \frac{1}{4} \Sigma a^2 + (\Sigma \mu - R)^2 - R^2 . \end{aligned}$$

Mais, on a :

$$\Sigma \mu = 2R \mp r . \tag{2}$$

D'où

$$\frac{1}{2} \Sigma \overline{AI}^2 = \frac{1}{4} \Sigma a^2 + (R \mp r)^2 - R^2 = \frac{1}{4} \Sigma a^2 + r^2 \mp 2Rr .$$

Donc<sup>1</sup> :

$$\overline{AI}^2 = \frac{1}{2} \Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4Rr .$$

Cela étant, passons maintenant à la démonstration de notre théorème.

Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, N le centre du cercle des neuf points et G le centre de gravité. (Fig. 8.)

Les trois points O, G, N sont en ligne droite et GO est égal au double de GN. Donc :

$$2\overline{IN}^2 + \overline{IO}^2 = 3\overline{IG}^2 + \overline{OG}^2 + 2\overline{NG}^2 = 3\overline{IG}^2 + \frac{3}{2}\overline{OG}^2 .$$

Mais, comme on sait :

$$\overline{IO}^2 = R^2 \mp 2Rr ,$$

$$3\overline{OG}^2 = \Sigma \overline{AO}^2 - \Sigma \overline{AG}^2 = 3R^2 - \frac{1}{3} \Sigma a^2 ,$$

$$3\overline{IG}^2 = \Sigma \overline{AI}^2 - \Sigma \overline{AG}^2 = \Sigma \overline{AI}^2 - \frac{1}{3} \Sigma a^2 .$$

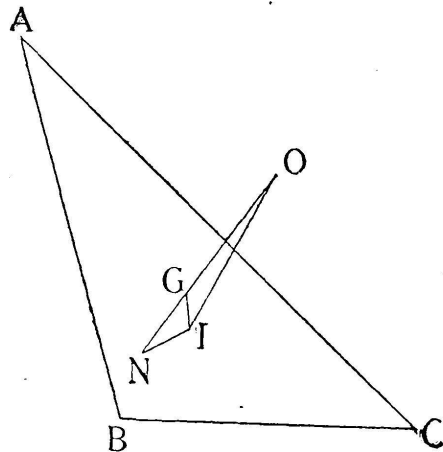


Fig. 8.

<sup>1</sup> Lorsque  $r$  représente le rayon du cercle inscrit, la formule (2) est donnée dans le traité de géométrie de ROUCHÉ et de COMBEROUSSE, 7<sup>e</sup> édition, 1<sup>re</sup> partie, p. 383.

Si dans la dernière égalité on met à la place de  $\Sigma AI^2$  l'expression donnée par le lemme précédent, on a

$$3\overline{IG}^2 = \frac{1}{6}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4Rr .$$

Donc :

$$2\overline{IN}^2 + R^2 \mp 2Rr = \frac{1}{6}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4Rr + \frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{6}\Sigma a^2 .$$

D'où :  $\overline{IN}^2 = \left(\frac{1}{2}R \mp r\right)^2$ , par suite  $IN = \frac{1}{2}R \mp r$ .

Donc les deux cercles  $A'B'C'$  et  $XYZ$  se touchent, c. q. f. d.

*Corollaire.* — En considérant le cercle inscrit dans l'angle  $A$ , on a :

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + r^2 \pm 4Rr = \frac{1}{4}(b + c \pm a)^2 .$$

Pour le voir, il suffit de comparer le résultat obtenu dans le lemme précédent avec la formule suivante :

$$\Sigma AI^2 = 3r^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 + (p - a)^2 \quad \text{ou} \quad p^2 .$$

### 9<sup>e</sup> Démonstration.

IX. — Dans cette démonstration, nous supposons que les segments des droites  $AC$  et  $AB$  soient affectés de signes et soient  $AC$ ,  $AB$  les sens positifs des segments.

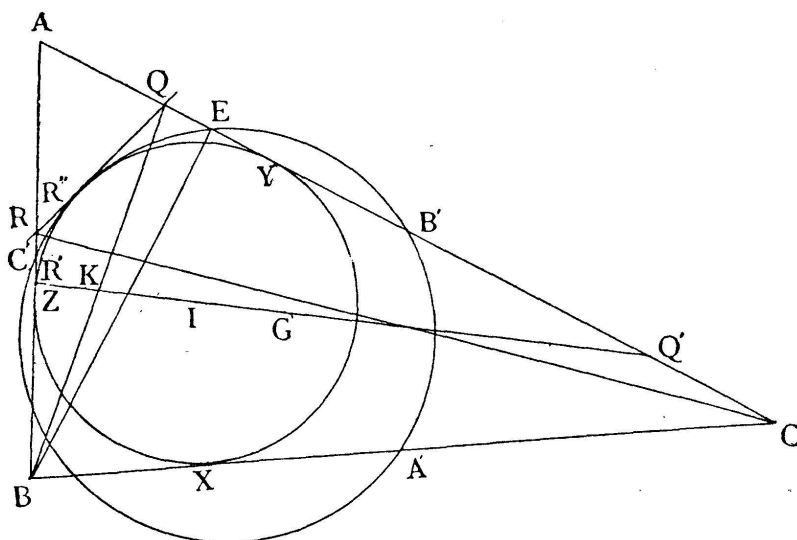


Fig. 9.

Représentons respectivement par  $a$ ,  $b$ ,  $c$  les trois côtés  $BC$ ,  $AC$  et  $AB$  du triangle  $ABC$ ; soient  $E$  le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet  $B$  sur le côté opposé et,  $Q$  et  $R$  les points de