Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1911)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOUVELLES DÉMONSTRATIONS D'UN THÉORÈME RELATIF AU CERCLE DES NEUF POINTS

Autor: Sawayama, Y.

Kapitel: 7e Démonstration.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13522

points P et α soient de part et d'autre de la droite $L\beta$, on aura :

$$\widehat{PL\beta} = \widehat{L\alpha\beta} = \widehat{LXY} \,,$$

donc la droite LP est tangente au cercle XYZ.

Ainsi donc les deux cercles $A'B'C'$ et XYZ, ayant une tangente commune à leur point de rencontre sont tangents entre eux.

7e Démonstration.

VII. — J'emploie encore les mêmes lettres que dans la 5e démonstration pour désigner les différents points de la figure; de plus j'appelle J' le point de rencontre des deux droites XY et $\alpha B'$. (Fig. 6.)

Pour la commodité de la démonstration, je suppose l'angle B plus petit que l'angle C, si le cercle XYZ était le cercle inscrit et plus grand que l'angle C si ce cercle était le cercle exinscrit.

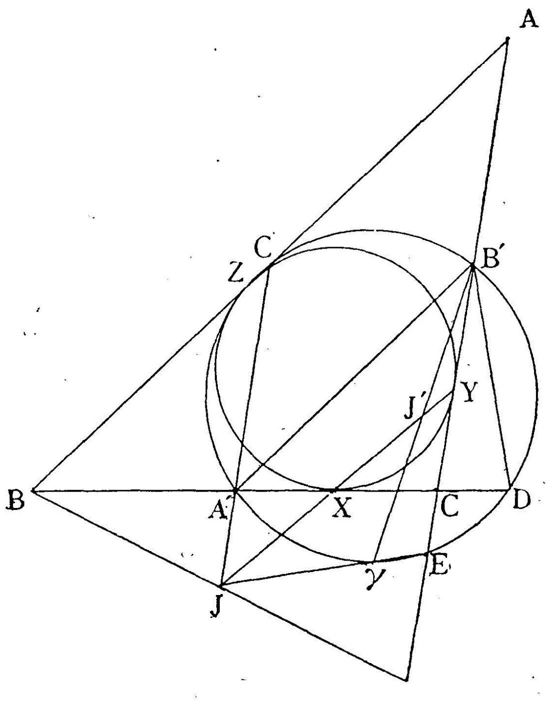

Fig. 6.

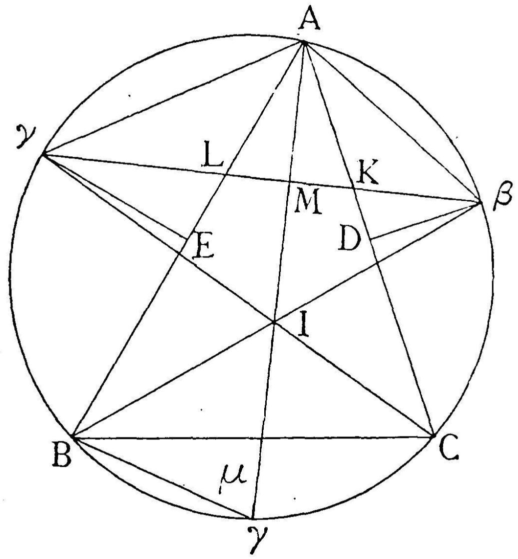

Fig. 7.

Alors, comme on a montré au commencement de la 6e démonstration, la corde de contact XY du cercle XYZ passe par le point J.

J'ai prouvé ensuite au courant de la même démonstration que l'angle aigu que font entre elles les deux droites αE et XY est égal à l'angle inscrit qui intercepte le demi-arc conjugué de l'arc $B'A'E$ si le cercle XYZ est inscrit et à l'angle inscrit qui intercepte la moitié de l'arc $B'A'E$ si le cercle est exinscrit. Or dans cette démonstration, la seule condition que doit remplir le point E est que ce point soit le point d'intersection de la droite AC et du cercle $A'B'C'$; donc les angles que fait la droite XY avec chacune des deux droites αE et $\alpha B'$ sont égaux entre eux.

Donc :

$$\alpha J' = \alpha J = \alpha A' .$$

D'où, en suivant la même marche que dans la 6e démonstration, on pourra prouver que les deux cercles $A'B'C'$ et XYZ se touchent entre eux.

8e Démonstration.

VIII. — *Lemme.* — En désignant par a, b, c les trois côtés d'un triangle ABC, par R le rayon du cercle circonscrit, par r et I le rayon et le centre du cercle XYZ, on a

$$\overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2r^2 \mp 4Rr .$$

(Pour cette démonstration, on pourra choisir un quelconque des trois cercles exinscrits pour le cercle XYZ.)

Soient β, γ les points où deux droites BI et CI coupent à nouveau la circonférence ABC. Soient encore D, E les pieds respectifs des perpendiculaires abaissées de β sur AC et de γ sur AB ; et K, L, M les points de rencontre de $\beta\gamma$ avec AC, AB, AI. (Fig. 7.)

Les droites βA et γA étant respectivement égales aux droites βI et γI, la droite $\beta\gamma$ est perpendiculaire à la droite AI et divise cette droite en deux parties égales ; donc les deux triangles βAM et $A\gamma E$ sont semblables et l'on a :

$$\frac{AM}{\gamma E} = \frac{\beta A}{A\gamma} .$$

De plus, la similitude des deux triangles βDA et $AM\gamma$ donne :

$$\frac{\beta D}{AM} = \frac{\beta A}{A\gamma} .$$

Des deux propositions précédentes, on tire [1] :

$$\frac{\beta D}{AM} = \frac{AM}{\gamma E} , \qquad \text{d'où} \qquad \beta D \cdot \gamma E = \overline{AM}^2 .$$

Donc, on a :

$$4\beta D \cdot \gamma E = \overline{AI}^2 \qquad (1)$$

[1] Quand I est le centre du cercle inscrit, cette relation (1) a déjà été donnée par l'un des mathématiciens de notre pays, nommé Shiraishi Nagatada dans son ouvrage publié en 1827 sous le titre de *Shaméi Sampu.*