**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 13 (1911)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** APPLICATION D'UNE PROJECTIVITÉ CYCLIQUE A LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

**Autor:** Pastor, Julio Rey

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-13536

# APPLICATION D'UNE PROJECTIVITÉ CYCLIQUE A LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

**1.** — J'appelle *associés*[1] par rapport au triangle ABC, les groupes de trois points ou de trois droites qui ont les mêmes coordonnées *barycentriques* (ponctuelles ou tangentielles) permutées circulairement suivant un ordre constant.

Je suppose, pour fixer les idées, que l'on associe les points M, N, P ou les droites $m$, $n$, $p$ dont les coordonnées (X, Y, Z) sont disposées ainsi :

$$(\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma) \qquad (\gamma\,,\ \alpha\,,\ \beta) \qquad (\beta\,,\ \gamma\,,\ \alpha) \tag{1}$$

J'appelle aussi droites ou points *alliés* par rapport à un sommet ou un côté, des éléments qui ont la même coordonnée relative à ce côté, et les deux autres coordonnées échangées. Chacun des éléments a donc trois alliés, et les trois associés (1) ont les mêmes alliés, dont les coordonnées sont

$$M'(\alpha\,,\ \gamma\,,\ \beta) \qquad N'(\beta\,,\ \alpha\,,\ \gamma) \qquad P'(\gamma\,,\ \beta\,,\ \alpha)\ ; \tag{2}$$

on en déduit que M′, N′, P′ sont aussi associés.

Pour abréger le langage, j'appellerai *triangle cyclique* le triangle formé par trois droites ou trois points associés, et nous verrons bientôt la raison de cette dénomination. Le triangle de référence ABC est cyclique.

**2.** — Les équations

ponctuelles des droites associées sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} lX + mY + nZ &= 0 \\ nX + lY + mZ &= 0 \\ mX + nY + lZ &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

tangentielles des points associés sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} lU + mV + nW &= 0 \\ nU + lV + mW &= 0 \\ mU + nV + lW &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

[1] Bien que ce mot ait été employé déjà pour désigner d'autres objets dans la Géométrie du triangle : dans le travail actuel il n'y aura pas de confusion possible.

Par suite, si deux droites sont associées, les points de l'une ont leurs associées sur l'autre et corrélativement.

Réciproquement :

la droite qui joint les deux points associés précédents ou suivants de deux points quelconques, est associée de celle qui joint ceux-ci.

le point d'intersection des deux droites associées précédentes ou suivantes de deux droites quelconques, est associé du point commun à celles-ci.

Les côtés du triangle dont les sommets sont des points associés, ou bien les sommets du trilatère dont les côtés sont des droites associées (triangle ou trilatère cyclique) sont aussi associés.

**3.** — Le rapport anharmonique de quatre points sur une droite s'obtient en projetant d'un sommet quelconque du triangle de référence. Il en résulte que les ponctuelles de points associés sur droites associées sont projectives. Il en est de même des faisceaux de droites associées dont les sommets sont des points associés.

Si l'on remarque

que la droite à l'infini est sa propre associée, il en résulte que les ponctuelles mentionnées sont en outre semblables.

que le barycentre du triangle ABC est son propre associé, on en déduit que dans les faisceaux en question les rayons qui projettent ce barycentre sont homologues.

Si une droite ne passe pas par le barycentre, il en est de même de ses associées, et l'on a un trilatère cyclique.

Si un point est à distance finie, il en est de même de ses associés, et l'on a un triangle cyclique.

Dans les deux cas, les divisions et les faisceaux homographiques ne sont pas perspectifs ; mais ils le seront certainement quand

un des trois supports passe par le barycentre, et alors les deux autres y passent également.

un des sommets des faisceaux est à l'infini, et alors les deux autres sont aussi à l'infini.

Ceci arrivera quand la condition $l + m + n = 0$ sera vérifiée.

**4.** — Pour chercher les droites ou les points coïncidant avec leurs associés, il faut identifier les équations (3) ou (3′), et il en résulte : ou bien $l = m = n$, correspondant à la droite à l'infini $X + Y + Z = 0$, ou au barycentre $U + V + W = 0$ (coordonnées ponctuelles ou tangentielles) ; ou encore $\frac{l}{w_1} = \frac{m}{w_2} = \frac{n}{w_3}$, en désignant par $w_1$, $w_2$, $w_3$ les racines cubiques de l'unité positive.

Il en résulte que

outre la droite à l'infini, il y a deux droites imaginaires conjuguées qui passent par le barycentre, et dont les équations sont renfermées dans

$$w_1 X + w_2 Y + Z = 0 \quad (4)$$

outre le barycentre, il y a deux points imaginaires conjugués, sur la droite à l'infini, et dont les équations sont renfermées dans

$$w_1 U + w_2 V + W = 0 \quad (4')$$

$w_1$ et $w_2$ désignant les deux racines cubiques imaginaires de l'unité.

Les coordonnées de ces deux points ou droites coïncidant avec leurs associées peuvent s'exprimer par les relations :

$$\frac{X}{w_1} = \frac{Y}{w_2} = \frac{Z}{w_3} \quad (5)$$

$$\frac{U}{w_1} = \frac{V}{w_2} = \frac{W}{w_3} \quad (5')$$

**5.** — Si nous prenons pour abscisse

$x$ d'un point quelconque à l'infini le rapport $\frac{X}{Z}$ des coordonnées barycentriques des droites qui y passent, les abscisses des deux points coïncidant avec leurs associés, sont $w_1$ et $w_2$ ;

$u$ de chaque droite issue du barycentre le rapport $\frac{U}{W}$ des coordonnées barycentriques des points de cette droite, les abscisses des droites coïncidant avec leurs associées sont $w_1$ et $w_2$ ;

et en regardant l'équation

$$w^2 + w + 1 = 0 \quad (6)$$

qui a pour racines les valeurs $w_1$ et $w_2$, il en résulte que les deux

points à l'infini mentionnés sont doubles de l'involution

$$xx' + \frac{1}{2}(x + x') + 1 = 0 \quad (7)$$

dans laquelle sont conjuguées les trois paires de points à l'infini de chacun des côtés du triangle de référence, et la mé-

droites passant par le barycentre sont doubles dans l'involution

$$uu' + \frac{1}{2}(u + u') + 1 = 0 \quad (7')$$

dans laquelle sont conjuguées les trois paires de rayons formés par les médianes du triangle de référence, et les paraldiane correspondante, puisque leurs abscisses sont :

lèles aux côtés correspondants issues du barycentre, puisque leurs abscisses sont :

$$(-2\,,\ 0) \qquad (1\,,\ -1) \qquad \left(-\frac{1}{2}\,,\ \infty\right).$$

On en conclut qu'il y a un triangle avec un sommet et le côté opposé réels et les deux autres sommets et côtés imaginaires conjugués, dont les éléments coïncident avec leurs associés.

6. — Donnons à présent quelques propriétés métriques des droites et des points associés, propriétés auxquelles n'est donc pas applicable la loi de corrélation.

*a)* en vertu de la loi fondamentale existant entre les coordonnées barycentriques d'un point $M(\alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, celles du barycentre du triangle cyclique MNP, sont égales à $\frac{1}{3}$. On déduit de là : *Tous les triangles cycliques ont même barycentre, coïndant avec celui du triangle de référence.*

*b)* Puisque deux points alliés quelconques ont une coordonnée commune, il en résulte que :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *les droites* | MP′ NN′ NM′ | *sont parallèles au côté* | b |
| » | MM′ PP′ NM′ | » » | c |
| » | NP′ MN′ PN′ | » » | a |

*c)* Les droites de chacun des ternes

$$MM'\ NN'\ PP' \qquad \text{(I)}$$

$$MP'\ NM'\ PN' \qquad \text{(II)}$$

$$MN'\ NP'\ PM' \qquad \text{(III)}$$

*sont associées et forment trois triangles circonscrits en même temps à* MNP *et* M′N′P′. *Ces cinq triangles et* ABC *ont le même barycentre qui est centre d'homohétie des triangles* (I), (II), (III) *et du triangle* ABC *combinés deux à deux.*

d) *En désignant par* $Q_1, R_1, S_1$ ; $Q_2, R_2, S_2$ ; $Q_3, R_3, S_3$, *les sommets des triangles* (I), (II), (III), Q, R, S *sont respectivement les homologues de* A, B, C, *on en déduit les coordonnées suivantes :*

$Q_1(\alpha\,,\ \alpha\,,\ 1-2\alpha)$ $\quad$ $Q_2(\beta\,,\ \beta\,,\ 1-2\beta)$ $\quad$ $Q_3(\gamma\,,\ \gamma\,,\ 1-2\gamma)$

$R_1(1-2\alpha\,,\ \alpha\,,\ \alpha)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$S_1(\alpha\,,\ 1-2\alpha\,,\ \alpha)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Les rapports d'homothétie de chacun de ces triangles avec ABC sont donc

$$1 - 3\alpha \ , \qquad 1 - 3\beta \ , \qquad 1 - 3\gamma$$

et par conséquent

$$\frac{Q_1 A}{GA} = \frac{R_1 B}{GB} = \frac{S_1 C}{GC} = 3\alpha \ , \qquad \ldots = 3\beta \ , \qquad \ldots = 3\gamma \ .$$

*e)* Soient $A_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, $A_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $A_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ trois points quelconques et $B_0(\gamma_0, \alpha_0, \beta_0)$, $B_1(\gamma_1, \alpha_1, \beta_1)$, $B_2(\gamma_2, \alpha_2, \beta_2)$ leurs premiers associés. Si nous désignons par $\Delta_A$, $\Delta_B$ les aires des triangles $A_0A_1A_2$ et $B_0B_1B_2$; et par $\Delta$ celle du triangle de référence ABC, on a les rapports suivants :

$$\Delta_A = \Delta \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_B = \Delta \begin{vmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

*c'est-à-dire :*

$$\Delta_A = \Delta_B \ .$$

Cela posé, on peut sans peine étendre cette relation à deux polygones associés quelconques en les décomposant en même nombre de triangles associés; et encore aux aires limitées par des courbes associées quelconques. Donc, enfin, on peut conclure : *la transformation étudiée n'altère pas l'aire des figures*[1].

**7.** — Voici un principe fondamental donnant des éléments associés; si par une suite d'opérations géométriques projectives exécutées sur un triangle ABC combiné avec divers points ou droites fixes, on obtient un point M ou une droite $m$, et si l'on répète les mêmes opérations sous la permutation circulaire (ABC) en faisant intervenir, au lieu des droites et des points primitifs, leurs associés successifs, on obtient deux nouveaux points $M'$, $M''$, ou droites $m'$, $m''$, qui sont les associés des premiers M, $m$ respectivement.

En effet, toutes les opérations exécutées peuvent être exprimées analytiquement; et si l'on adopte les coordonnées barycentriques, les opérations mentionnées exécutées dans les trois cas pour obtenir les coordonnées des points $M M' M''$ sont les mêmes, en y remplaçant X, Y, Z par Y, Z, X respectivement; par suite, si $(\alpha, \beta, \gamma)$ sont les coordonnées de M, celles de $M'$ et $M''$ sont $(\gamma\ \alpha\ \beta)$ et $(\beta\ \gamma\ \alpha)$, ce qui démontre le théorème énoncé. Un raisonnement analogue peut être appliqué au théorème corrélatif.

*Note.* Comme la droite à l'infini est sa propre associée, l'opéra-

---

[1] Cela d'ailleurs est évident en observant que cette transformation est *affine*.

tion de diviser un segment dans un rapport donné peut être comprise parmi les opérations projectives en question.

8. — Pour faire des applications de ce principe, je choisirai quelques exemples où l'on verra comment on peut simplifier plusieurs questions élémentaires de la Géométrie du triangle, dont les démonstrations ordinaires, bien que simples, sont abrégées considérablement.

Voici trois questions proposées dans la *Revista trimestral de Matemáticas*.

*a)* On prendra sur les trois côtés d'un triangle ABC des points A', B', C' divisant ces côtés dans un même rapport $\frac{m}{n}$. Les droites AA', BB', CC' se coupent en M, N, P par lesquelles on mène les droites $B_1C_1$, $C_1A_1$, $A_1B_1$ respectivement parallèles à BC, CA, AB; les droites $C_2A_2$, $A_2B_2$, $B_2C_2$ parallèles à CA, AB, BC; et enfin $A_3B_3$, $B_3C_3$, $C_3A_3$ parallèles à AB, BC, CA. Démontrer : 1° que les sommets homologues des quatre triangles homothétiques ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ sont les médianes du triangle ABC. — 2° que les distances des sommets du triangle ABC aux homologues du triangle $A_1B_1C_1$, sont moyennes proportionnelles entre les distances aux sommets homologues des triangles $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$ [1].

Il suffit d'observer que les points A', B', C' sont associés, de même que les points M, N, P; et les points nommés $A_1$, $B_1$, $C_1$, $A_2$, $B_2$, $C_2$, $A_3$, $B_3$, $C_3$, par l'auteur, sont respectivement les points $Q_1$, $R_1$, $S_1$, $Q_2$, $R_2$, $S_2$, $Q_3$, $R_3$, $S_3$ du paragraphe (6, *d*), ce qui démontre la première partie. Pour la seconde, en exprimant que le triangle MNP est circonscrit au triangle ABC, on a, si $\alpha\beta\gamma$ sont des coordonnées de M :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$$

ou bien $\alpha^2 = \beta\gamma$; relation qui, rapprochée des expressions du paragraphe (5, *d*), justifie complètement l'énoncé.

*b)* Sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC, on prend les points $A_1$, $B_1$, $C_1$ tels que

$$A_1C = \frac{BC}{K}, \quad B_1A = \frac{CA}{K}, \quad C_1B = \frac{AB}{K}.$$

Si M, N, P sont les milieux des côtés $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, démon-

[1] Question 254 proposée par M. H. von Aubel dans le *Progreso Matemático* et 133 dans la *Revista trimestral de Matemáticas* (n° 21), 1906.

trer que les triangles ABC, MNP ont le même barycentre, et exprimer l'aire du triangle MNP en fonction de celle de ABC [1].

De même que dans la question précédente, les points $A_1$, $B_1$, $C_1$ et aussi les points M, N, P sont associés, et suivant (6, *a*) la première partie est démontrée. Pour la seconde il suffit de porter, dans la relation

$$\Delta_1 = \Delta \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$$

les valeurs

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \beta = \frac{1}{2K} \qquad \gamma = \frac{K-1}{2K} .$$

*c)* En prolongeant les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC des longueurs $CA_1$, $AB_1$, $BC_1$ égales à leurs moitiés, on prend sur les droites $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ des points M, N, P tels que

$$\frac{AM}{AA_1} = \frac{BN}{BB_1} = \frac{CP}{CC_1} = \frac{1}{n} ,$$

et on mène par ceux-ci les parallèles aux côtés *a*, *b*, *c* ou aux côtés *b*, *a*, *c* ou *c*, *a*, *b*, ces droites passent par un même point Q ou Q′ ou Q″ [2].

Il suffit de noter que les points $A_1$, $B_1$, $C_1$ sont associés et aussi les points M, N, P ; les droites parallèles menées passent donc de trois en trois par les points alliés.

**9.** — On peut aussi exposer cette théorie en partant de la définition plus générale des coordonnées triangulaires [3] du point M (2) qui substitue à la droite à l'infini une autre droite quelconque. Dans cette hypothèse la correspondance établie est une homographie dont les éléments doubles sont cette droite et deux autres imaginaires se coupant sur son pôle trilinéaire par rapport au triangle.

Mais les propriétés exposées dans le cas particulier de l'affinité suffisent pour se faire une idée du parti que l'on peut tirer de cette théorie si simple pour démontrer plusieurs propriétés relatives à la Géométrie du triangle.

Il est aisé de voir que la plupart de ces propriétés sont applicables au tétraèdre. Nous les omettons pour abréger ; le lecteur fera sans peine la généralisation.

Julio Rey Pastor (Madrid).

---

[1] Question 132 proposée par M. E.-N. Barisien dans la *Revista trimestral de Matemáticas* (nº 21), 1906.

[2] L. de Alba. Question 127 de la *Rev. trim. de Math.*

[3] M. Vegas. Tratado de Geometria analitica. Madrid, 1907.