Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1911)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REMARQUE RELATIVE AU CALCUL DU RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE PLANE

Autor: Turrière, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13534

REMARQUE RELATIVE AU CALCUL DU RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE PLANE

Les axes coordonnés $O(xy)$ sont rectangulaires ; ds représente l'élément linéaire d'une courbe; R est le rayon de courbure au point (x, y). De la relation

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 ,$$

il résulte, par dérivation, que les deux rapports

$$\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{dy}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{dx}{ds} \tag{1}$$

sont égaux en valeur absolue; leur valeur commune est la courbure $\frac{1}{R}$. Ces expressions de la courbure, qui semblent avoir été utilisées par MICHEL DE L'HOSPITAL, présentent de réels avantages dans la pratique. C'est ce que je me propose de mettre en évidence par la considération de nombreux exemples.

Dans un grand nombre de problèmes de *Mathématiques générales* ou de *Calcul différentiel et intégral,* les étudiants ont à calculer la courbure d'une courbe plane, intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre qui admet pour transformation infinitésimale la translation parallèle à une direction privilégiée du plan ; c'est, en d'autres termes, une équation réductible à la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(y) , \tag{2}$$

dans laquelle ne figure qu'une seule coordonnée, y par exemple. Il en résulte que $\frac{dx}{ds}$ est une fonction Y de y, connue et la plupart du temps fort simple. Souvent même c'est cette dernière équation

$$\frac{dx}{ds} = \mathrm{Y}(y) \tag{3}$$

qui sert de point de départ pour le problème posé et que l'on transforme, en vue de l'intégration, en l'équation différentielle (2). Comme exemples de courbes (2) et (3) présentant un intérêt historique, je citerai la cycloïde, la chaînette, la chaînette d'égale résistance de Coriolis, la courbe logistique, la courbe d'égale pression, la courbe élastique, la chaînette extensible en chaque point proportionnellement à la tension, la corde à sauter, la courbe de Delaunay, les courbes de Ribaucour, la méridienne de la surface pseudosphérique de révolution, la tractrice, la syntractrice, les méridiennes des surfaces de révolution applicables sur la sphère..... Dans tous ces exemples, les fonctions $f(y)$ ou Y sont explicites; dans d'autres cas, dans celui par exemple de la méridienne du solide de moindre résistance de Newton, y et $\frac{dy}{dx}$ sont liés par une relation de forme implicite.

La remarque, que je me propose de signaler, est la suivante: *dans le cas où l'équation différentielle considérée se présente sous la forme* (3), *ou bien est réductible à cette forme, il n'y a qu'à dériver la fonction* Y *de* y *pour avoir la courbure des courbes intégrales.* Il résulte, en effet, des formules (1) et (3) que l'on a

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \left| \frac{d\mathrm{Y}}{dy} \right| .$$

J'ai cru devoir signaler cette formule qui me semble pouvoir être parfois d'une certaine utilité; elle présente, en tous cas, l'avantage appréciable de rendre l'expression de la courbure indépendante de l'intégration de l'équation différentielle et des erreurs de calcul qui pourraient avoir été commises dans cette intégration.

E. TURRIÈRE (Alençon).