

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	13 (1911)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	NOUVELLES DÉMONSTRATIONS D'UN THÉORÈME RELATIF AU CERCLE DES NEUF POINTS
<b>Autor:</b>	Sawayama, Y.
<b>Kapitel:</b>	5e Démonstration.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-13522">https://doi.org/10.5169/seals-13522</a>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

En supposant maintenant  $\widehat{B} > \widehat{C}$ , on a dans le triangle ILK :

$$\overline{IK}^2 - \overline{IL}^2 = 2LK \cdot FM = 2AP \cdot AE ;$$

mais dans le triangle rectangle ADP, on a :

$$AP \cdot AE = \overline{AD}^2 ,$$

et en appelant I' le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur A'P et N' le milieu de A'K, on aura :

$$AD = \frac{1}{2}(AC - AB) = XA' = II' ,$$

donc

$$\overline{IK}^2 - \overline{IL}^2 = 2 \cdot \overline{XA'}^2 = \overline{XA'}^2 + \overline{II'}^2 .$$

D'où

$$\overline{IL}^2 + \overline{XA'}^2 = \overline{IK}^2 - \overline{II'}^2 = \overline{IK}^2 - \overline{I'K}^2 ,$$

donc

$$\overline{IL}^2 + (\overline{XA'}^2 + \overline{IX}^2) = \overline{IK}^2 + \overline{I'A'}^2$$

donc encore :

$$\overline{IL}^2 + \overline{IA'}^2 = \overline{IK}^2 + \overline{I'A'}^2 = 2 \cdot \overline{IN'}^2 + 2 \cdot \overline{N'A'}^2 = 2 \cdot \overline{IN'}^2 + 2 \cdot \overline{NA'}^2 .$$

D'un autre côté, on a dans le triangle ILA' :

$$\overline{IL}^2 + \overline{IA'}^2 = 2 \cdot \overline{IN}^2 + 2 \cdot \overline{NA'}^2 .$$

Des deux dernières égalités, on tire :

$$2 \cdot \overline{IN}^2 = 2 \cdot \overline{IN'}^2 .$$

Donc

$$IN = IN' = N'A' \mp I'A' = NA' \mp IX$$

(les doubles signes correspondant, le premier au cas où I est le cercle inscrit et le second au cas où I est un cercle exinscrit. Il en sera de même dans la suite).

Ainsi donc la distance du centre des neuf points et du centre du cercle inscrit ou exinscrit étant égale à la différence ou à la somme des rayons de ces deux cercles, on voit alors que ces deux cercles se touchent.

### 5<sup>e</sup> Démonstration.

V. — Soient D et E les pieds des perpendiculaires abaissées respectivement des sommets A et B du triangle ABC sur leurs

côtés opposés, I le centre du cercle XYZ, J et K les points de rencontre respectifs avec les droites AI et AC de la droite menée de B perpendiculairement à AI, et enfin  $\alpha$  le second point de rencontre de la droite EJ avec le cercle A'B'C'. (Fig. 4.)

On voit sur la figure que les quatre points  $\alpha$ , A', E, C' sont sur la même circonference, que le point J est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle BEK, que C'A' et AC sont parallèles et que J est le centre du cercle exinscrit au triangle AC'E comme j'ai indiqué dans la 3<sup>e</sup> démonstration ; et d'après ces quatre conditions on doit avoir :

$$\widehat{\alpha A' J} = \widehat{\alpha E C'} = \widehat{\alpha E K} = \widehat{J K E} = \widehat{B J C'} . \quad (1)$$

Donc  $\alpha A'$  est parallèle à BK et par suite perpendiculaire à AI. Le second point de rencontre des cercles dont les centres sont respectivement en  $\alpha$  et A' et qui se coupent d'abord en J est donc sur la droite AI ; j'appelle L ce second point de rencontre.

Le parallélisme des droites C'A' et AC donne :

$$\widehat{\alpha J A'} = \widehat{\alpha E K} , \quad \text{mais} \quad \widehat{\alpha E K} = \widehat{\alpha A' J}$$

d'après (1), donc :

$$\widehat{\alpha J A'} = \widehat{\alpha A' J} , \quad \text{par suite} \quad \alpha A' = \alpha J .$$

D'ailleurs, comme le point  $\alpha$  est le milieu de l'arc B'A'C' et que B'C' et A'D sont parallèles, ce point  $\alpha$  est aussi le milieu de l'arc A'D.

Il s'en suit que le cercle dont le centre est en  $\alpha$  et ayant  $\alpha J$  pour rayon passe par les deux points A' et D.

Ensuite les deux longueurs A'X et A'J étant chacune égale à la demi-différence de AC et AB sont égales entre elles.

Donc, le point X est sur la circonference de centre A' et de rayon A'J.

Or, dans le cercle JA'L, on a :

$$\overline{\alpha I}^2 - \overline{\alpha A'}^2 = IJ \cdot IL ,$$

mais IX étant tangent au cercle JX'L,

$$IJ \cdot IL = \overline{IX}^2 , \quad \text{donc :} \quad \overline{\alpha I}^2 = \overline{IX}^2 + \overline{\alpha A'}^2 . \quad (2)$$

Maintenant, en désignant par N le centre du cercle A'B'C', par I' le pied de la perpendiculaire abaissée du point I à la droite

$\alpha N$  et par  $X'$  le point de rencontre de  $\alpha N$  et de  $A'D$ , on a dans le triangle  $\alpha IN$

$$\begin{aligned}\overline{IN}^2 &= \overline{\alpha N}^2 + \overline{\alpha I}^2 \mp 2\alpha N \cdot (I'X' \pm \alpha X') \\ &= \overline{\alpha N}^2 + \overline{\alpha I}^2 \mp 2\alpha N \cdot I'X' - 2 \cdot \alpha N \cdot \alpha X' \\ &= \overline{\alpha N}^2 + \overline{\alpha I}^2 \mp 2\alpha N \cdot IX - \overline{\alpha A'}^2 .\end{aligned}\quad (3)$$

D'après les deux égalités (2) et (3), on aura :

$$\overline{IN}^2 = \overline{\alpha N}^2 + \overline{IX}^2 \mp 2\alpha N \cdot IX = (\alpha N \mp IX)^2 ,$$

on a donc :

$$IN = \alpha N \mp IX ,$$

ce qui montre que les deux cercles  $N$ ,  $I$  se touchent.

*Corollaire.* —  $J$  est également distant des trois côtés du triangle  $A'ED$ .

#### 6<sup>e</sup> Démonstration.

VI. — En désignant les différents points de la figure par les mêmes lettres que dans la 5<sup>e</sup> démonstration, menons la droite passant par les points  $X$  et  $J$ . (Fig. 5.)

Puisque  $A'J$  et  $A'X$  sont égaux et que  $A'J$  et  $CY$  sont parallèles, les deux triangles  $A'XJ$  et  $CXY$  sont des triangles isocèles et équivalents ; donc  $XY$  et  $XJ$  coïncident entre eux.

Menons la droite qui passe par deux points  $\alpha$  et  $X$  et qui rencontre de nouveau en  $L$  le cercle  $A'B'C'$ .

Les deux angles  $\alpha LA'$  et  $\alpha A'X$  étant égaux, le cercle qui passe par les trois points  $A'$ ,  $X$ ,  $L$  touche la droite  $\alpha A'$  au point  $A'$  ; donc

$$\alpha X \cdot \alpha L = \overline{\alpha A'}^2 .$$

Mais  $\alpha J = \alpha A'$  comme on a indiqué dans la 5<sup>e</sup> démonstration, donc :

$$\alpha X \cdot \alpha L = \overline{\alpha J}^2 ,$$

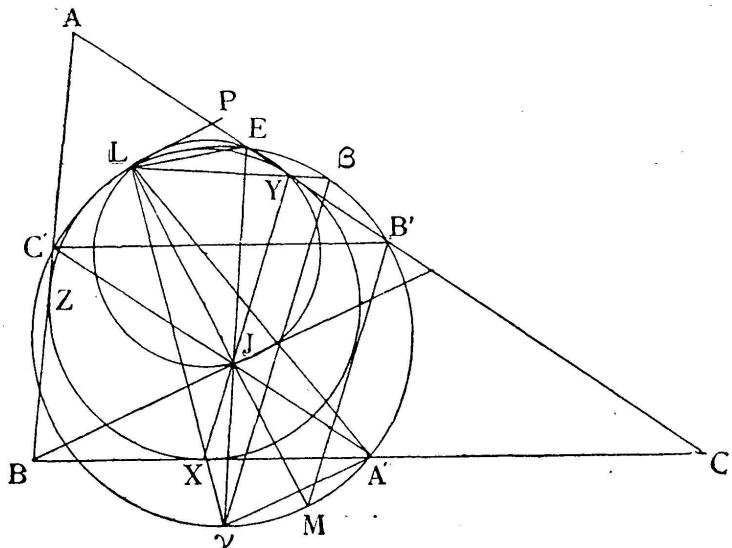


Fig. 5.