Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1911)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RÉGIONS DÉFINIES PAR UNE HYPERBOLE

Autor: Poyet, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13529

RÉGIONS DÉFINIES PAR UNE HYPERBOLE

1. Objet. — Dans cette Note je me propose de construire la théorie de l'hyperbole sans faire aucun appel à l'intuition graphique; je me fonderai uniquement pour cela sur des propositions établies — ou supposées telles — dans les premiers livres de géométrie. Parmi ces propositions, il en est de nombreuses qui ont pour objet des propriétés d'*ordre* (points sur une droite, sur un cercle, droites autour d'un point) de *positions relatives* des figures élémentaires (points, droites, cercles) et l'*énumération complète* des cas possibles de figure. Toutes ces propositions se rattachent au deuxième groupe d'axiomes d'Hilbert.

Peut-être cet essai intéressera-t-il ceux qui réfléchissent sur la portée de l'enseignement de la géométrie élémentaire et qui ont pris parti dans le débat actuel institué sur le sens qu'il convient de lui donner.

J'espère que « logiciens » et « intuitifs » trouveront un *document* dans ce chapitre de géométrie élémentaire, édifié *logiquement* sur des matériaux fournis par l'*intuition*, penseront ceux-ci, par le raisonnement déductif déjà en fonction, diront les autres.

Et serait-il téméraire de penser qu'un exposé de ce genre pourrait être fait — après d'autres leçons — devant de bons élèves de mathématiques élémentaires afin de leur montrer comment on peut traiter certaines questions que leur caractère même semble mettre à part des problèmes qu'ils sont habitués à résoudre ? Ce serait une excellente occasion de leur dire que cette étude est un problème simple de *géométrie de situation* (topologie des courbes).

Comme la matière de cette étude est très élémentaire, je me bornerai à une rapide esquisse sans souci de compléter les démonstrations quand une indication succinte pourra suffire; je demande cependant aux lecteurs de *L'Enseignement mathématique* la permission de ne pas perdre patience si je prends la peine — en leur donnant celle de me suivre — d'étudier complètement les cas, justement les plus simples.

Uniformément, au début de chaque problème, je rappellerai brièvement les propositions que j'utilise; j'espère donner ainsi plus de concision et de clarté à mon exposé.

2. **Définitions.** — L'*hyperbole* est le lieu des centres des cercles tangents à un cercle fixe, le *cercle directeur* que je désignerai par ($C_{F'}$) et passant par un point fixe extérieur, le *foyer* F. J'appellerai (F), (E), (F') les trois régions et (f), (f') les deux branches de l'hyperbole.

Propositions rappelées. **A.** — α) L'un par rapport à l'autre, deux cercles peuvent être : extérieurs, tangents extérieurement, sécants, tangents intérieurement, intérieurs, soit *cinq positions*.

β) Quand on *distingue* les deux cercles, il y a lieu de considérer deux circonstances pour les deux derniers cas, suivant que le premier est intérieur ou extérieur au deuxième.

γ) Si l'on astreint l'un des cercles à passer par un point extérieur à l'autre cercle, une seule circonstance peut se produire. Dans ces conditions il y a donc seulement cinq cas possibles.

Enumération des domaines. — Soit P un point quelconque du plan. J'aurai constamment à considérer et je désignerai par C_P le cercle de centre P passant par F. Le cercle C_P pourra occuper par rapport au cercle directeur $C_{F'}$ l'une des cinq positions rappelées; chacune d'elle sera caractéristique des cinq domaines du point P.

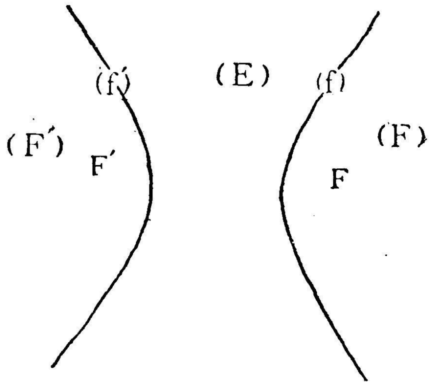

Fig. 1.

En voici l'énumération : le cercle C_P est 1°, extérieur à $C_{F'}$, le point P est dans la région intérieure (F) contenant F; 2°, tangent extérieurement à $C_{F'}$. P est sur la branche (f) voisine de F; 3°, sécant à $C_{F'}$, P est dans la région extérieure (E); 4°, tangent intérieurement à $C_{F'}$, P est sur la branche (f) voisine de F′; 5° il renferme $C_{F'}$, P est dans la région intérieure (F′) contenant F′.

Remarque. L'équivalence de ces définitions avec celles qu'on adopte ordinairement est évidente.

3. **Problème fondamental.** — Position d'une droite par rapport à l'hyperbole. Intersection.

Propositions rappelées. **B.** — Je considère un cercle $C_{F'}$, un point extérieur F et une droite D. J'appelle Φ le symétrique de F par rapport à D. Soit P un point mobile se déplaçant dans un certain sens sur la droite D et, comme ci-dessus C_P le cercle de centre P assujetti à passer par F, donc par Φ. Pour étudier la position relative du cercle fixe $C_{F'}$ et du cercle mobile C_P, je distingue deux cas :

1° D ne passe pas par F′;

2° D passe par F′.

B$_1$. *Premier cas.* J'utilise les propriétés de l'*axe radical.*

α) Un cercle est déterminé par un point et par l'axe radical qu'il doit avoir en commun avec un cercle déjà tracé.

La position relative de ces éléments suffit pour caractériser la position du cercle ainsi défini par rapport au cercle tracé.

β) Tous les axes radicaux des couples $C_{F'}$, C_P [$C_{F'}$ est fixe, C_P passe par deux points fixes] passent par un point fixe I situé à distance finie sur FΦ. Pour faire la *discussion* des divers cas possibles, il est avantageux de faire jouer à F et Φ des rôles dissymétriques [1]; j'en omets ici le détail, j'en donnerai seulement les résultats ci-dessous en les utilisant.

γ) Ayant déterminé la position du point I et connaissant le centre P du cercle mobile C_P on construit l'axe radical d'un couple $C_P\,C_{F'}$ en abaissant de I une perpendiculaire sur F′P.

δ) On déduit de cette construction que l'axe radical tourne de 180° autour de I, dans un sens déterminé, à partir de la position IF, quand P décrit toute la droite dans un certain sens. La discussion des différentes circonstances qui peuvent

[1] Cf. Guichard, *Traité de géométrie*, n° 378.

se produire constitue, relativement au premier cas, l'objet même du « problème fondamental ».

B₂. *Deuxième cas.* L'étude peut être faite ici à partir des propriétés de la *ligne des centres;* elle se conduirait d'une manière tout analogue.

α) Pour connaître la position relative de deux cercles il suffit d'étudier la position de leurs intersections avec leur ligne des centres.

β) D est constamment la ligne des centres des couples $C_{F'}$, C_P.

γ) Quand on connaît la position de P il est très simple de construire les deux points du cercle C_P situés sur D.

δ) Cette construction permet de suivre le mouvement des points sur l'axe quand P décrit la droite D dans un certain sens.

C. — Je considère un cercle $C_{F'}$ et les deux tangentes issues d'un point extérieur F.

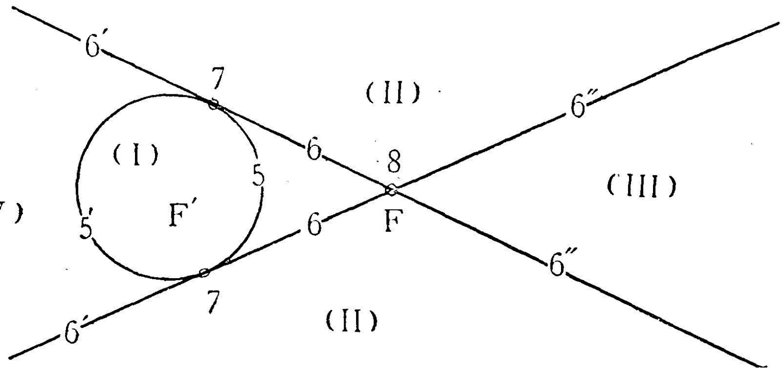

Fig. 2.

α) Le cercle est tout entier à l'intérieur d'un angle des tangentes.

β) Une droite menée par le sommet F, à l'intérieur de l'angle, rencontre le cercle, menée à l'extérieur, elle ne rencontre pas le cercle.

γ) Les réciproques sont vraies.

δ) Il serait aisé, dans la figure étudiée, d'énumérer les régions, leurs frontières et les points remarquables des frontières[1].

[1] Voir GUICHARD, *Compléments de géométrie*, p. 294.

Discussion. — Je définis et je caractérise les positions diverses de D par celles de Φ.

Quand D passe par F, Φ coïncide avec F, il faudra se donner la perpendiculaire en F à D et les mêmes raisonnements demeurent.

J'écarterai le cas où D passe par F′, Φ se trouvant sur le cercle de centre F′ et passant par F; s'il en était ainsi, on ferait une discussion semblable à la suivante; celle-ci est relative au premier cas, celle-là se rapporterait au second. [Voir ci-dessus les propositions **B**.]

La discussion [$\mathbf{B}_1\ \beta$] amène à étudier Φ dans chacun des huit domaines définis ci-dessus [**C** δ].

J'examinerai seulement les deux premiers cas; la méthode est uniforme.

1er cas. Φ est à l'intérieur du cercle $C_{F'}$: région (I).

Tout cercle C_P qui passe par Φ coupe nécessairement le cercle $C_{F'}$ [voir **D** γ]. Donc tous les points de D sont extérieurs; ils appartiennent à (E).

La droite est dite *extérieure.*

2me cas. Φ est à l'extérieur de l'angle des tangentes : région (II). La droite FΦ ne rencontre pas le cercle [**C** β]. Le point I centre radical fixe est à l'extérieur du cercle [**C** α]. Du point I je mène les tangentes au cercle, la droite IF est située à l'extérieur de l'angle des tangentes [**C** γ]. Quand P se déplace sur D dans un certain sens, l'axe radical tourne de 180° autour de I à partir de la position IF dans un sens déterminé [$\mathbf{B}_1\ \delta$] et, d'après la remarque [$\mathbf{B}_1\ \alpha$], les deux cercles C_P et $C_{F'}$ sont successivement : *intérieurs, tangents intérieurement, sécants, tangents extérieurement, extérieurs,* c'est-à-dire que le point P se trouve successivement dans les régions ou sur les branches : (F′) (f') (E) (f) (F).

Si P avait cheminé en sens inverse, on eût trouvé dans l'ordre inverse (F) (f) (E) (f') (F′).

On dit que la droite est *sécante* aux deux branches.

On discuterait de même les cas 3, 4, 5, 6 et 7 en ne distinguant pas les domaines marqués d'un accent (voir la fig. ci-dessus). Le 8me cas est parasite et se ramène aux précédents 2, 3 ou 6.

Après avoir étudié les positions de Φ écartées au début, on a enfin le tableau complet suivant.

Tableau résumant la discussion. — La droite est

1° *extérieure* : ... (E)

2° *sécante* aux deux branches : (F) (f) (E) (f') (F')

3° *sécante* à la branche (f) : (E) (f) (F) (f) (E)

4° *sécante* à la branche (f') : (E) (f') (F') (f') (E)

5° *tangente* à l'une ou l'autre branche : (E) (f) (E) ou (E) (f') (F)

6° *parallèle* à l'une ou l'autre asymptote : (E) (f) (F) ou (E) (f') (F')

7° *asymptote* à la courbe : (E).

Remarque. La symétrie entre F et F', voilée dans toute l'étude précédente, réapparaît dans ce tableau final.

Corollaires. Propriétés des *régions* et des *branches.*

I. Si le point P appartient à la région (F) et si le point Q est extérieur à cette région, le segment PQ rencontre la branche (f), car la droite qui supporte le segment PQ peut occuper seulement l'une ou l'autre des positions 2, 3, 6. De plus, le point d'intersection borne l'ensemble des points situés dans (F); la branche (f) est dite la *frontière* de la région (F).

II. Si P et Q sont dans la région (F) ou sur la branche (f), tout le segment PQ est contenu dans (F). On dit que le domaine (F) est *convexe*. Le domaine (F') jouit de la même propriété.

III. On verrait de même que la frontière de la région (E) est composée des deux branches (f) et (f'). Si P et Q sont sur les deux branches, le segment PQ est tout entier dans (E). Pour compléter l'étude de (E), il est nécessaire de résoudre au préalable un second problème.

4. **Autre problème.** — Positions diverses des droites issues d'un point. Tangentes [voir la définition dans le tableau].

Propositions rappelées. **D.** — α. Quand une droite D tourne de 180° autour d'un point fixe P, le symétrique Φ d'un point fixe F décrit toute une circonférence C_P de centre P passant par F. Le déplacement angulaire de Φ autour de P est de même sens et double du déplacement angulaire de la droite.

β. Quand deux cercles se coupent, chaque circonférence est partagée en deux arcs par les deux points d'intersection ; l'un des arcs est intérieur, l'autre est extérieur au second cercle.

γ. Réciproque. Quand une circonférence passe par deux points dont l'un F est à l'extérieur, l'autre Φ à l'intérieur d'une deuxième circonférence, les deux cercles se coupent.

Discussion. — Les sept cas du tableau complet peuvent se résumer dans les trois suivants :

1° Φ est à l'intérieur du cercle directeur $C_{F'}$; la droite D est *extérieure* à l'hyperbole.

2° Φ est sur le cercle directeur $C_{F'}$; la droite D est *tangente* à l'hyperbole.

3° Φ est à l'extérieur du cercle ; la droite D est *sécante* à l'hyperbole.

De même, à cause de la symétrie de F et F', on peut réduire à trois les positions d'un point par rapport à une hyperbole : le point est intérieur, sur la courbe ou extérieur. Dans le premier cas, on montre que toutes les droites sont sécantes, dans le second, qu'on peut tracer une tangente, toutes les autres droites sont sécantes ; enfin dans le troisième, qu'il y a deux tangentes distinctes, des droites sécantes et des droites extérieures. Je vais l'examiner en détail.

Comme le point P est dans (E), le cercle C_P coupe le cercle $C_{F'}$, et d'après la remarque [**D** β] les deux points d'intersection limitent sur C_P deux arcs dont l'un est intérieur, l'autre extérieur à $C_{F'}$. Or, quand D tourne autour de P de 180° dans un certain sens, Φ décrit tout le cercle C_P dans un sens déterminé [**D** α] en parcourant successivement les deux arcs. Les droites sécantes sont donc comprises dans un angle des tangentes, les droites extérieures dans l'autre. Cette propriété, démontrée ici pour l'hyperbole, a été admise pour le cercle [C_β].

Corollaire IV. Si P et Q appartiennent à la région (E) ou à sa frontière (f) (f'), on peut tracer de P à Q un chemin continu tout entier contenu dans (E), sauf peut-être les extrémités.

Je distingue trois cas.

1° L'un des deux points est à l'intérieur du domaine (E), soit Q. On peut toujours tracer par P une droite *p* dont tous les points — sauf peut-être P — sont extérieurs, et par Q une droite extérieure *q* seulement assujettie à rester dans un angle, on pourra donc la choisir non parallèle à *p*. Des segments convenables de *p* et *q* réalisent le chemin cherché.

2° Les deux points sont sur la même branche; les tangentes en P et Q ne sont pas parallèles [la démonstration complète en serait aisée] et fournissent un chemin satisfaisant.

3° Les deux points sont sur les deux branches; le segment PQ est entièrement dans (E) [voir corollaire III].

On énonce la propriété précédente en disant que la région (E) est *d'un seul tenant*[1].

Remarques. I. On peut faire une première étude des régions de l'hyperbole en n'utilisant que des droites issues d'un foyer[2]; dans l'analyse plus complète qui précède, j'ai construit des chemins continus avec des droites quelconques; là se borne la puissance des méthodes élémentaires.

II. On pourrait établir d'une manière aussi entièrement déductive toutes les propriétés de l'hyperbole.

P. Poyet (Bordeaux).

---

[1] Voir Hadamard, *Géométrie dans l'espace*. Ex. 772, p. 217.

[2] Voir par exemple Vacquant et Macé de Lépinay, *Eléments de géométrie*, p. 514 et suiv.