Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1911)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

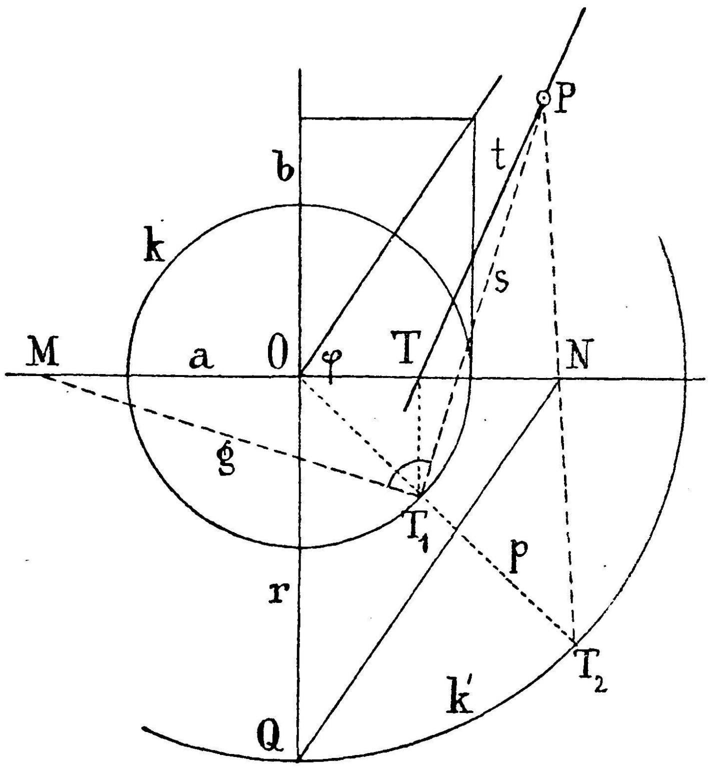
Artikel: UNE CONSTRUCTION DE L'HYPERBOLE COMME LIEU DE POINTS ET GOMME ENVELOPPE

Autor: Majcen, Georges

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13528

UNE CONSTRUCTION DE L'HYPERBOLE COMME LIEU DE POINTS ET COMME ENVELOPPE

Une considération de l'hyperboloïde de rotation à une nappe m'a fourni quelques relations qui peuvent être employées pour une construction simple de l'hyperbole (deux axes $2a$ et $2b$ étant donnés) et, en même temps, pour la construction des tangentes dans les points déterminés de la courbe.



Comme les constructions connues de l'hyperbole et de ses tangentes ne sont pas nombreuses, je donne ici encore cette construction nouvelle en espérant qu'on pourra en faire usage dans l'enseignement.

Soit P un point de l'hyperbole, ayant x_1, y_1 comme coordonnées; désignons par a et b les demi-axes de la courbe. La tangente en P

$$(t) \qquad b^2 x_1 x - a^2 y_1 y - a^2 b^2 = 0$$

coupe l'axe a (qui est situé sur l'axe des x) en un point T, ayant les coordonnées

$$x = \frac{a^2}{x_1}, \qquad y = 0 .$$

La droite $x = \frac{a^2}{x_1}$ (parallèle à l'axe des y) coupe le cercle k, décrit du centre O avec a comme rayon, en deux points, dont l'un seulement (T_1) sera pris en considération. Les coordonnées du point T_1 seront, par rapport à l'équation

$$(k) \quad x^2 + y^2 = a^2 ,$$

les suivantes :

$$x = \frac{a^2}{x_1} , \qquad y = -\frac{a}{x_1}\sqrt{x_1^2 - a^2} ,$$

La droite de jonction PT_1 aura l'équation :

$$(PT_1) \quad y + \frac{a}{x_1}\sqrt{x_1^2 - a^2} = \frac{x_1 y_1 + a\sqrt{x_1^2 - a^2}}{x_1^2 - a^2}\left(x - \frac{a^2}{x_1}\right) .$$

Elevons en T_1 la perpendiculaire (g) à PT_1 ; la droite g aura l'équation

$$y + \frac{a}{x_1}\sqrt{x_1^2 - a^2} = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1 y_1 + a\sqrt{x_1^2 - a^2}}\left(x - \frac{a^2}{x_1}\right) .$$

En posant ici $y = 0$, nous obtiendrons l'abscisse du point (M) d'intersection de la droite g avec l'axe des x. On aura

$$a y_1\sqrt{x_1^2 - a^2} + \frac{a^2}{x_1}(x_1^2 - a^2) = (a^2 - x_1^2)x + (x_1^2 - a^2)\frac{a^2}{x_1} ,$$

alors, en posant ici

$$a y_1 = + b\sqrt{x_1^2 - a^2}$$

(ce qui résulte de l'équation de l'hyperbole donnée), nous aurons la distance cherchée $\overline{OM}$

$$x = \overline{OM} = -b .$$

Toutes les perpendiculaires g passent, par conséquent, par le point fixe (M).

Déterminons maintenant le point (T_2) commun aux rayons OT_1 et PN, où N est le point sur l'axe des x, ayant pour abscisse $\overline{ON} = b$.

Noùs aurons

$$(OT_1) \quad y = - \frac{\sqrt{x_1^2 - a^2}}{a} x \; ;$$

l'autre rayon PN, comme droite passant par les points avec les coordonnées (x_1, y_1), $(b, 0)$, aura l'équation

$$(PN) \quad y - y_1 = \frac{-y_1}{b - x_1}(x - x_1) \; .$$

En éliminant y entre les deux équations dernières, on obtient l'abscisse du point cherché T_2 :

$$x' = \frac{aby_1}{(x_1 - b)\sqrt{x_1^2 - a^2} + ay_1} \, ,$$

et si l'on pose ici comme précédemment :

$$ay_1 = + b\sqrt{x_1^2 - a^2} \, ,$$

on aura

$$x' = \frac{b^2}{x_1} \; .$$

L'ordonnée y' du point T_2 sera obtenue à l'aide de l'équation de la droite OT_1 en y remplaçant x par sa valeur x' déterminée ci-dessus, or :

$$y' = - \frac{b^2}{ax_1} \sqrt{x_1^2 - a^2} \; .$$

La somme des carrés de x' et y' donne :

$$x'^2 + y'^2 = \frac{b^4}{a^2} \; .$$

Le point T_2 décrit alors un cercle k' dont le rayon est la grandeur $\frac{b^2}{a}$, c'est-à-dire une fonction des demi-axes seuls de l'hyperbole.

La longueur $\frac{b^2}{a} = r$ peut être construite aisément, parce qu'on a

$$\frac{r}{b} = \frac{b}{a} = \operatorname{tang} \varphi \ ,$$

où φ désigne la moitié de l'angle asymptotique.

Si l'on tire par le point N la parallèle à une asymptote, le point (Q), commun à cette parallèle et à l'axe des y, sera un point de la circonférence du cercle k'.

Voici donc comment on procédera dans la détermination constructive d'un point P de l'hyperbole, donnée par ses axes. On porte sur l'axe réel les segments $OM = ON = b$, et on décrit les deux cercles k et k' restant fixes pendant toute la construction. En faisant passer une droite quelconque (p) par le centre O, on obtient les points T_1 et T_2 comme intersections respectives avec les circonférences k et k'. Si l'on tire les droites de jonction T_1M et T_2N et si l'on élève à la première une perpendiculaire (s) au point T_1, les deux droites T_2N et s donnent en leur point commun P *un point* de l'hyperbole. Le pied T de la perpendiculaire, abaissée du point T_1 sur l'axe réel, joint au point P donne la *tangente t* de la courbe au point P.

La droite T_2N étant une fois tirée, on déterminera aussi le deuxième point d'intersection T_2' avec la circonférence k', et on obtiendra par le même procédé tout de suite encore un autre point de l'hyperbole.

Une tangente t de l'hyperbole étant donnée, on détermine le point de contact P de la manière suivante. On élève une perpendiculaire sur l'axe réel par le point d'intersection de cet axe avec la tangente t. La perpendiculaire coupe le cercle k au point T_1. Si l'on joint ce point T_1 au point M et si l'on élève une perpendiculaire (s) sur T_1M au point T_1, cette perpendiculaire coupe la tangente au point de contact cherché P.

On ne peut pas employer cette construction si l'on donne $a = b$; la construction sera d'autant plus précise que la différence $\pm (a - b)$ est plus grande (pour les deux cas, où l'on donne $a > b$ ou $a < b$).

Georges Majcen (Agram).