Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1911)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE CONSTRUCTION DE L'HYPERBOLE COMME LIEU DE POINTS ET GOMME ENVELOPPE
Autor: Majcen, Georges
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13528

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

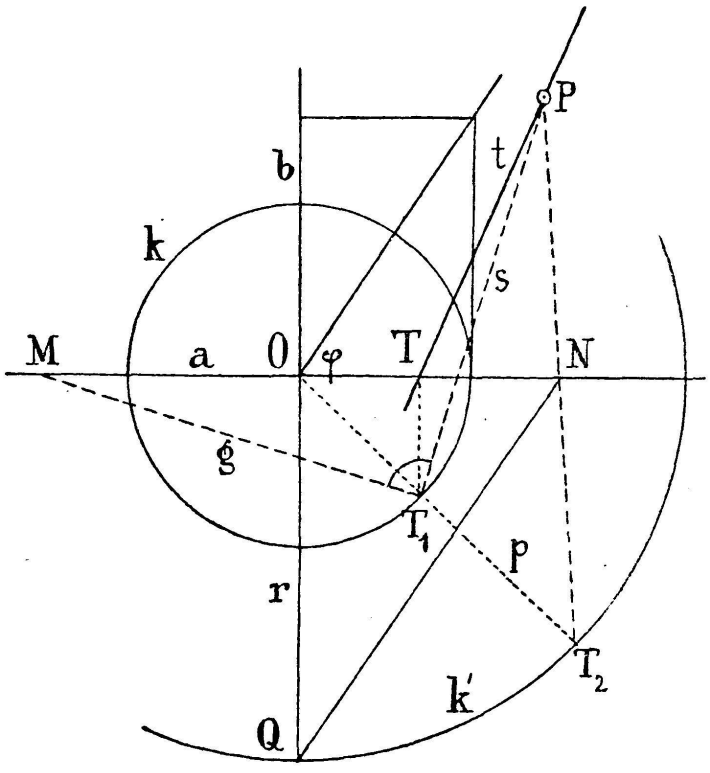
Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

UNE CONSTRUCTION DE L'HYPERBOLE COMME LIEU DE POINTS ET COMME ENVELOPPE

Une considération de l'hyperboloïde de rotation à une nappe m'a fourni quelques relations qui peuvent être employées pour une construction simple de l'hyperbole (deux axes $2a$ et $2b$ étant donnés) et, en même temps, pour la construction des tangentes dans les points déterminés de la courbe.



Comme les constructions connues de l'hyperbole et de ses tangentes ne sont pas nombreuses, je donne ici encore cette construction nouvelle en espérant qu'on pourra en faire usage dans l'enseignement.

Soit P un point de l'hyperbole, ayant x_1, y_1 comme coordonnées; désignons par a et b les demi-axes de la courbe. La tangente en P

$$(t) \qquad b^2 x_1 x - a^2 y_1 y - a^2 b^2 = 0$$

coupe l'axe a (qui est situé sur l'axe des x) en un point T, ayant les coordonnées

$$x = \frac{a^2}{x_1}, \qquad y = 0 .$$

La droite $x = \frac{a^2}{x_1}$ (parallèle à l'axe des y) coupe le cercle k, décrit du centre O avec a comme rayon, en deux points, dont l'un seulement (T_1) sera pris en considération. Les coordonnées du point T_1 seront, par rapport à l'équation

$$(k) \quad x^2 + y^2 = a^2 ,$$

les suivantes :

$$x = \frac{a^2}{x_1} , \qquad y = -\frac{a}{x_1}\sqrt{x_1^2 - a^2} ,$$

La droite de jonction PT_1 aura l'équation :

$$(PT_1) \quad y + \frac{a}{x_1}\sqrt{x_1^2 - a^2} = \frac{x_1 y_1 + a\sqrt{x_1^2 - a^2}}{x_1^2 - a^2}\left(x - \frac{a^2}{x_1}\right) .$$

Elevons en T_1 la perpendiculaire (g) à PT_1 ; la droite g aura l'équation

$$y + \frac{a}{x_1}\sqrt{x_1^2 - a^2} = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1 y_1 + a\sqrt{x_1^2 - a^2}}\left(x - \frac{a^2}{x_1}\right) .$$

En posant ici $y = 0$, nous obtiendrons l'abscisse du point (M) d'intersection de la droite g avec l'axe des x. On aura

$$a y_1 \sqrt{x_1^2 - a^2} + \frac{a^2}{x_1}(x_1^2 - a^2) = (a^2 - x_1^2)x + (x_1^2 - a^2)\frac{a^2}{x_1} ,$$

alors, en posant ici

$$a y_1 = + b\sqrt{x_1^2 - a^2}$$

(ce qui résulte de l'équation de l'hyperbole donnée), nous aurons la distance cherchée $\overline{OM}$

$$x = \overline{OM} = - b .$$

Toutes les perpendiculaires g passent, par conséquent, par le point fixe (M).

Déterminons maintenant le point (T_2) commun aux rayons OT_1 et PN, où N est le point sur l'axe des x, ayant pour abscisse $\overline{ON} = b$.

Nous aurons

$$(\mathrm{OT}_1) \quad y = -\frac{\sqrt{x_1^2 - a^2}}{a} x \ ;$$

l'autre rayon PN, comme droite passant par les points avec les coordonnées (x_1, y_1), $(b, 0)$, aura l'équation

$$(\mathrm{PN}) \quad y - y_1 = \frac{-y_1}{b - x_1}(x - x_1) \ .$$

En éliminant y entre les deux équations dernières, on obtient l'abscisse du point cherché T_2 :

$$x' = \frac{aby_1}{(x_1 - b)\sqrt{x_1^2 - a^2} + ay_1} \ ,$$

et si l'on pose ici comme précédemment :

$$ay_1 = +\, b\sqrt{x_1^2 - a^2} \ ,$$

on aura

$$x' = \frac{b^2}{x_1} \ .$$

L'ordonnée y' du point T_2 sera obtenue à l'aide de l'équation de la droite OT_1 en y remplaçant x par sa valeur x' déterminée ci-dessus, or :

$$y' = -\frac{b^2}{ax_1}\sqrt{x_1^2 - a^2} \ .$$

La somme des carrés de x' et y' donne :

$$x'^2 + y'^2 = \frac{b^4}{a^2} \ .$$

Le point T_2 décrit alors un cercle k' dont le rayon est la grandeur $\frac{b^2}{a}$, c'est-à-dire une fonction des demi-axes seuls de l'hyperbole.

La longueur $\frac{b^2}{a} = r'$ peut être construite aisément, parce

qu'on a

$$\frac{r}{b} = \frac{b}{a} = \operatorname{tang} \varphi \ ,$$

où φ désigne la moitié de l'angle asymptotique.

Si l'on tire par le point N la parallèle à une asymptote, le point (Q), commun à cette parallèle et à l'axe des y, sera un point de la circonférence du cercle k'.

Voici donc comment on procédera dans la détermination constructive d'un point P de l'hyperbole, donnée par ses axes. On porte sur l'axe réel les segments $OM = ON = b$, et on décrit les deux cercles k et k' restant fixes pendant toute la construction. En faisant passer une droite quelconque (p) par le centre O, on obtient les points T_1 et T_2 comme intersections respectives avec les circonférences k et k'. Si l'on tire les droites de jonction T_1M et T_2N et si l'on élève à la première une perpendiculaire (s) au point T_1, les deux droites T_2N et s donnent en leur point commun P *un point* de l'hyperbole. Le pied T de la perpendiculaire, abaissée du point T_1 sur l'axe réel, joint au point P donne la *tangente* t de la courbe au point P.

La droite T_2N étant une fois tirée, on déterminera aussi le deuxième point d'intersection T_2' avec la circonférence k', et on obtiendra par le même procédé tout de suite encore un autre point de l'hyperbole.

Une tangente t de l'hyperbole étant donnée, on détermine le point de contact P de la manière suivante. On élève une perpendiculaire sur l'axe réel par le point d'intersection de cet axe avec la tangente t. La perpendiculaire coupe le cercle k au point T_1. Si l'on joint ce point T_1 au point M et si l'on élève une perpendiculaire (s) sur T_1M au point T_1, cette perpendiculaire coupe la tangente au point de contact cherché P.

On ne peut pas employer cette construction si l'on donne $a = b$; la construction sera d'autant plus précise que la différence $\pm (a - b)$ est plus grande (pour les deux cas, où l'on donne $a > b$ ou $a < b$).

Georges MAJCEN (Agram).