

LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE DES QUINCONCES

Autor(en): **Aubry, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1911)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-13527>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE DES QUINCONCES

1. On appelle *quinconce* l'ensemble indéfini des intersections de deux systèmes de parallèles équidistantes, numérotées à partir de deux d'entre elles, prises comme *directrices*, elles-mêmes numérotées zéro (fig. 1).

L'étude de cette figure constitue une sorte de géométrie analytique en nombres entiers, dans laquelle les coordonnées sont, non plus des longueurs, mais des numéros.

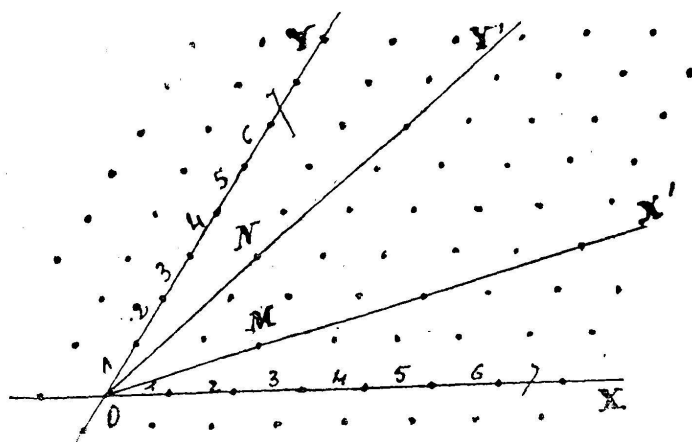


Fig. 1.

Un quinconce étant défini par l'angle φ des directrices et les longueurs OA, OB des *équidistances*, un point quelconque du quinconce se désigne par son numéro-abscisse x et son numéro-ordonnée y , et se note (x, y) .

Si les deux systèmes de parallèles sont tracés, la figure est un *réseau*, divisant le plan en parallélogrammes égaux. Le réseau s'appelle plus particulièrement *quadrillage*, quand les directrices sont rectangulaires et les deux équidistances égales.

Un quinconce n'est donc autre que l'ensemble des intersections d'un réseau. On comprend qu'à un quinconce quelconque correspondent une infinité de réseaux, lesquels sont dits dans ce cas *équivalents*.

2. Une droite joignant deux points quelconques d'un quinconce, en rencontre une infinité d'autres, qui sont *équidistants*.

3. Les nombres a et n étant premiers entre eux, la droite $ax - ny = 0$, déterminée par l'origine et par le point (n, a) du quinconce rencontre une infinité de points équidistants représentés par la formule (kn, ka) , k désignant les nombres $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Elle n'en rencontre pas d'autres; car puisque $ax = ny$, et que a et n sont premiers entre eux, a doit diviser y , et n diviser x .

La droite $ax - ny = af - ng$, menée par le point (f, g) du quinconce parallèlement à la droite précédente, est dans le même cas et rencontre le quinconce en une infinité de points équidistants.

Soit $af - ng = b$; on a ainsi graphiquement les solutions, en nombre infini, de l'équation $ax - ny = b$.

4. Etant donné trois points quelconques (x, y) , (x', y') et (x'', y'') d'un quinconce, on peut, de trois manières différentes, déterminer un quatrième point qui forme avec les trois premiers, un parallélogramme. Tel est le point

$$\left(\frac{x' + x'' - x}{2}, \frac{y' + y'' - y}{2} \right)$$

diagonalement opposé au point (x, y) .

Il suffit de remarquer que la demi-somme des ordonnées de deux sommets opposés est égale à celle des deux autres.

5. L'angle des directrices étant φ ; que l'on pose $\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{ac}}$ et que les équidistances soient appelées \sqrt{a} sur les abscisses, et \sqrt{c} sur les ordonnées; le quinconce représentera la forme $(a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, a et c étant positifs; puisque le carré de la distance du point (x, y) à l'origine est $(x\sqrt{a})^2 + (y\sqrt{c})^2 + 2x\sqrt{a}y\sqrt{c} \cos \varphi$ ¹.

En outre, la surface de chaque parallélogramme élémentaire est égale à $\sqrt{\Delta}$, Δ désignant la valeur de l'expression $ac - b^2$ (GAUSS).

On verra facilement qu'aux formes (a, o, c) et (a, b, a) cor-

¹ x représente le nombre des divisions de l'abscisse; y , celui des divisions de l'ordonnée; et non des longueurs.

respondent un quinconce rectangulaire et un autre quinconce formé de losanges.

6. Les directrices étant OX , OY , on peut rapporter le quinconce à deux autres directrices OX' , OY' déterminées par l'origine et deux de ses points M , N : il est alors défini par l'angle $Y'OX'$ et les deux équidistances OM , ON .

7. L'ensemble des points $x = ax' + by'$, $y = cx' + dy'$, expressions dans lesquelles a , b , c , d désignent des entiers fixes, x' et y' tous les entiers positifs ou négatifs, — figure

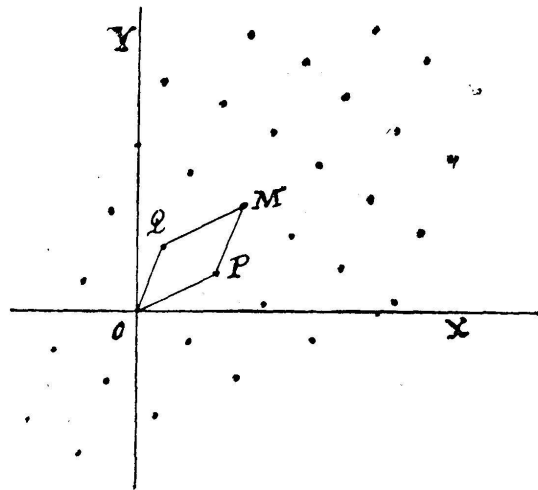


Fig. 2.

un certain quinconce (fig. 2) qu'on symbolise ainsi $\begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix}$ et qui n'est plus rapporté à ses directrices¹. En effet on a :

$$[a(x' + \alpha) + b(y' + \beta)] + [a(x' - \alpha) + b(y' - \beta)] = 2(ax' + by')$$

$$[c(x' + \alpha) + d(y' + \beta)] + [c(x' - \alpha) + d(y' - \beta)] = 2(cx' + dy').$$

Ce quinconce représente les solutions de l'équation $ax + by = ct$, où x et y désignent des coordonnées, et t un coefficient variable.

L'expression $ad - bc$ s'appelle la *norme* du quinconce et s'indique par la notation $N \begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix}$: elle représente, comme on s'en assurera aisément, la surface de l'un des parallélogrammes élémentaires.

Si le quinconce $\begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix}$ contient tous les points de $\begin{bmatrix} a'b' \\ c'd' \end{bmatrix}$, on dit qu'il en est le *multiple*: de là, l'assimilation de cette représentation aux nombres premiers ou composés: ainsi le produit des quinconces $\begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} a'b' \\ c'd' \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}$.

¹ Pour plus de simplicité, la figure suppose rectangulaires les axes de coordonnées; mais il est facile d'étendre la théorie au cas où les coordonnées ne se coupent plus sous un angle droit.

x' et y' désignent les équidistances sur les axes de coordonnées, et OP , OQ celles sur les directrices.

Le quinconce est *premier* si sa norme est un nombre premier.

Par le moyen des substitutions $x = \alpha x' + \beta y'$, $[y = \gamma x' + \delta y'$, du quinconce $\begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix}$, on déduit un autre quinconce $\begin{bmatrix} a' b' \\ c' d' \end{bmatrix}$ lié au premier par la formule

$$N \begin{bmatrix} a' b' \\ c' d' \end{bmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma) N \begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix},$$

de sorte que si $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, les deux quinconces sont identiques; leur groupement seul diffère, étant effectué sur des systèmes de parallèles formant deux réseaux équivalents.

Par des considérations d'un autre ordre, on arrive à une nouvelle interprétation analytique des quinconces. La longueur du côté OP du parallélogramme OPMQ a pour expression

$$a(am^2 + 2bm\mu + c\mu^2),$$

en appelant $am + b\mu$ et $\mu\sqrt{\Delta}$ les coordonnées rectangulaires du point P. Cette longueur représente donc la forme (a, b, c) , au facteur a près.

Soient appelés (x, y) et (ξ, η) les points P et Q; les côtés OP, OQ peuvent être figurés ainsi :

$$t = x + yi, \quad \tau = \xi + \eta i.$$

L'expression $[t, \tau] = zt + \zeta\tau$ représentera un quinconce, qui sera déterminé si on se donne les nombres z et ζ , et on aura :

$$N[t, \tau] = x\eta - \xi y.$$

Posons

$$u = \alpha t + \beta\tau, \quad v = \gamma t + \delta\tau,$$

on obtiendra un quinconce placé généralement et qui donnera

$$N[u, v] = (\alpha\delta - \beta\gamma) N[t, \tau].$$

Cette géométrisation des formes quadratiques, — dont les éléments sont seuls donnés ici¹, — est due à M. POINCARÉ

¹ A citer ces deux problèmes : reconnaître si un quinconce est identique à un autre quinconce donné, et trouver les transformations qui changent un quinconce en lui-même; la réduction des formes et leur composition.

(*J. E. P.*, 1880); elle a été retrouvée par M. KLEIN (*Vorl. über ausgew. Kap. der Zahlentheorie*, Leipzig, 1895).

8. Appelons *quinconce de module n*, la partie d'un quinconce comprise entre les axes et les coordonnées portant le numéro n .

Les nombres a et n étant premiers entre eux, et $a < n$, considérons sur le quinconce de module n , les points (x, y) pour lesquels l'ordonnée y est égale au reste de la division de ax par n : ces n points sont disposés sur le quinconce suivant des parallélogrammes égaux (GAND) (fig. 3). Cela résulte de

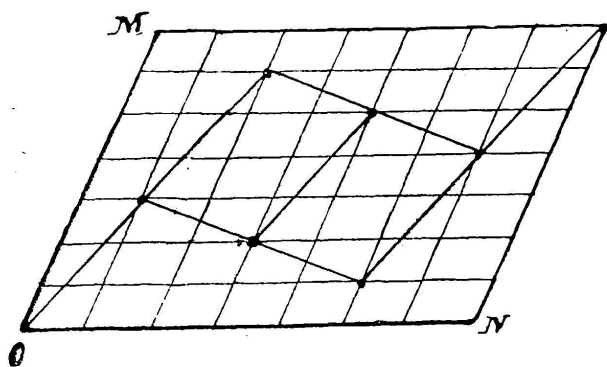


Fig. 3.

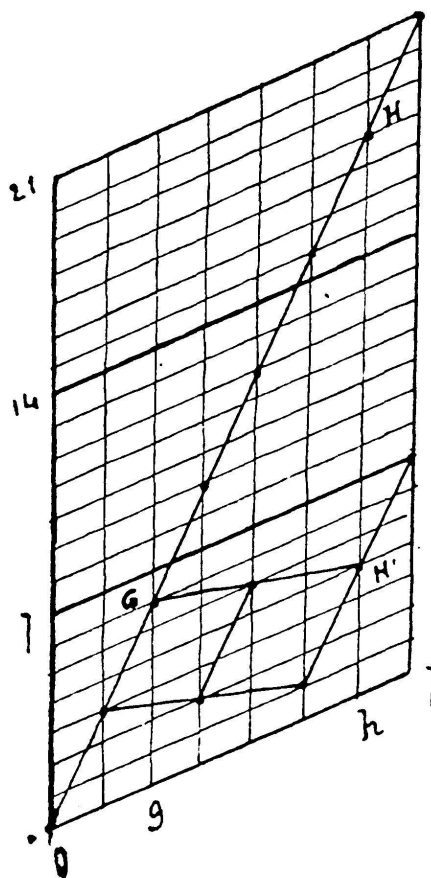


Fig. 4.

la régularité même de la construction: en effet, le premier point est à l'origine; sur la première ordonnée, on monte de a ; sur la deuxième, on monte encore de a , et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on sorte du quinconce, et alors on complète l'ascension de a sur l'ordonnée suivante.

La figure 4 fournit une autre démonstration intuitive de la proposition; car elle se réduit à la figure 3, en rabaissant jusqu'à l'axe des x la partie située au-dessus de la droite $y = n$, puis la partie au-dessus de la droite $y = 2n$, et

ainsi de suite. Les diverses ascensions se trouvent reportées dans le quinconce inférieur, telles quelles, ou bien fragmentées.

L'ensemble des n points ainsi définis s'appelle un *satin*, nom qu'il tire d'un tissu d'origine chinoise bien connu et établi d'après ce principe¹. La figure 3 représente le satin 7_3 correspondant aux données $n = 7$, $a = 3$.

9. *Le satin n_{n-a} est le symétrique, ou l'envers, du satin n_a (GAND).*

10. *Chaque parallèle à l'axe des x contient un point du satin et n'en contient qu'un (GAND).* Si on avait, par exemple, $H'h = Gg$ (fig. 4), il s'ensuivrait² $Hh \equiv Gg$, et HH' serait à la fois de la forme nz et de la forme aw avec $z < a$ et $w < n$; or cela est impossible.

Cette proposition n'est autre que le lemme fondamental.

11. *Les équidistances sur les parallèles étant appelées d et e , la surface de chacun des parallélogrammes formés de quatre points voisins est égale à nde , de sorte qu'il y a dans le satin n parallélogrammes égaux ou fragmentés (Gand).* Cela découle immédiatement de ce que le quinconce a une surface de n^2de , et que les n parallélogrammes sont égaux, par suite de la symétrie de la construction.

En général, le parallélogramme dont trois sommets sont l'origine et les points (x, y) et (x', y') , a pour surface $(dx')(ey) - (dx)(ey')$; or on a $ey \equiv axd$ et $ey' \equiv axd$; d'où il suit que la surface est $\equiv 0$.

Le plus souvent, les axes sont rectangulaires et les équidistances d et e sont égales et se représentent alors par le nombre 1 : on peut dire, dans ce cas, que la surface de chaque parallélogramme est égale à n .

12. Le satin n_a peut être considéré par rapport au côté OM pris comme axe des x (fig. 3), et alors on a le symétrique d'un satin n_a tel que, pour un point quelconque (x, y) du premier, qui est le point $(-y, x)$ du second, on a :

$$ax \equiv y, \quad ay \equiv x, \quad \text{d'où} \quad ax \equiv 1.$$

¹ Les satins 2_1 et n_1 ont reçu les noms particuliers de *toile* ou *damier* et de *serge* ou *diagonale*. Il n'en sera pas question ici.

² On sous-entendra partout la mention « (mod n) ».

Ainsi le satin 7_3 , de la figure 3, devient le satin 7_5 : 3 et 5 étant les valeurs de la première ordonnée dans les deux sens.

Les deux nombres a et α sont dits *associés*. Il est clair que *chaque entier a premier avec n , a son associé*, c'est-à-dire un nombre α tel que $a\alpha \equiv 1$. Cette démonstration est d'Ed. LUCAS.

13. Il est facile de déterminer dans chaque cas, le nombre de satins d'un *module* donné n : on cherche les valeurs de a pour lesquelles ce nombre est premier avec n et inférieur à sa moitié¹. On les groupe par associés deux à deux et on ne conserve que les plus petits termes dans chaque groupe. Ce nombre n'est pas susceptible d'être représenté par une formule simple, sauf si n est premier, auquel cas il est $\frac{n-1}{4}$ ou $\frac{n-3}{4}$, selon que n est 4 ± 1 .

14. Les axes seront maintenant toujours supposés rectangulaires, et les équidistances égales.

Si n est la somme de deux carrés premiers entre eux, g^2 et h^2 , il existe une valeur f de a , qui donne $a^2 + 1 \equiv 0$, et les parallélogrammes du satin sont des carrés (GAND). Soit γ l'associé de g ; de $g^2 + h^2 = n$, on tire, en multipliant par γ et posant $h\gamma \equiv f$, la congruence $f^2 + 1 \equiv 0$.

Le carré de la distance des deux points (x, y) et (x', y') du satin est égal à

$$(fx' - fx)^2 + (x' - x)^2 = (f^2 + 1)(x' - x)^2 \equiv 0$$

chacun des parallélogrammes a ainsi une surface égale à n , et des côtés de la forme $n\sqrt{k}$, $n\sqrt{l}$, ce qui ne peut avoir lieu que si ces parallélogrammes sont des carrés.

Le tableau suivant donne les *satins carrés* de modules inférieurs à 100 :

$$n = 5, 10, 13, 17, 25, 26, 29, 34, 37, 41, 50, 53, 58, 61, 65, 73, 74, 82, \\ 85, 85, 89, 97 ;$$

$$f = 2, 3, 5, 4, 7, 5, 12, 13, 6, 9, 7, 23, 17, 11, 8, 18, 27, 31, 9, 13, 38, 34, 22 .$$

¹ Inutile de chercher les valeurs $> \frac{n}{2}$, puisque le satin n_{n-a} est le symétrique du satin n_a .

La figure 5 représente le satin carré 10_8 .

Cor. I. Un satin carré reste identique à lui-même quand on le fait tourner d'un quart de tour; puisque de $f^2 \equiv -1$, on tire $fx \equiv y$ et $fy \equiv (n - x)$.

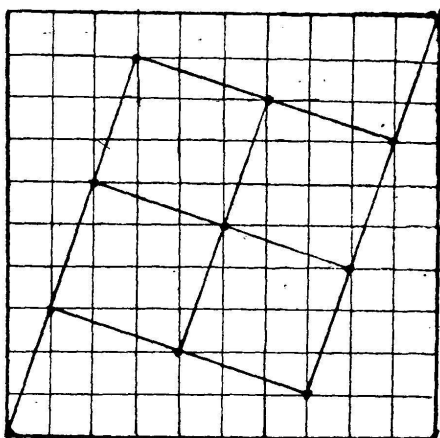


Fig. 5.

II. Si on appelle q et r le quotient et le reste de la division de n par f , on a : $q^2 + r^2 \equiv 0$ et $q \equiv rf$. Conséquences de la congruence $fq \equiv -r$.

15. Le satin n_a peut être considéré comme le lieu des points (x, y) définis par la relation $y \equiv ax$.

Si $n = g^2 + h^2$, c'est-à-dire si le satin est carré, on a

$$x^2 + y^2 \equiv x^2 + a^2 x^2 \equiv 0 .$$

Le nombre $g^2 + h^2$ divisant $x^2 + y^2$, il divise aussi

$$g^2(x^2 + y^2) - y^2(g^2 + h^2) = g^2 x^2 - h^2 y^2 ;$$

il divise donc l'un des deux nombres $A = gx + hy$, $B = gx - hy$; or il est facile de voir qu'il divise $gA - hB$: il divise donc A et B . On verra de même qu'il divise les deux nombres $hx \pm gy$.

Ainsi g et h désignant des entiers premiers entre eux, et n , le nombre $g^2 + h^2$, le lieu du point (x, y) défini en coordonnées rectangulaires par l'une ou l'autre des quatre relations

$$gx \pm hy \equiv 0 , \quad hx \pm gy \equiv 0$$

est un satin carré. Il en est de même de ceux définis par une relation de la forme $gx \pm hy \equiv gl \pm hm$, mais alors l'origine des coordonnées n'est pas un point du satin.

16. Si n divise un nombre de la forme $x^2 - 1$, la valeur $a = x$ donne des losanges, et le satin est symétrique par rapport à la diagonale (GAND). De $a^2 - 1 \equiv 0$, on tire en effet $xy \equiv a^2 xy$; d'où, en posant $ax \equiv y$, cette autre relation $x \equiv ay$: les points (x, y) et (y, x) du satin n_a sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Les satins suivants sont dans ce cas :

$$n = 8, 12, 15, 16, 20, 21, 24, 24, 24, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 39, 40, 40, 40, \\ 42, 44, 45, 48, 48, 48, 52 ;$$

$$a = 3, 5, 4, 7, 9, 8, 5, 7, 11, 13, 11, 15, 10, 6, 17, 14, 9, 11, 19, 13, 21, 19, \\ 7, 17, 23, 25 .$$

D'autres satins forment également des losanges, mais ne sont pas symétriques : tel est le satin 40_7 , et en général ceux pour lesquels la somme du quotient et du reste de la division de n par a est égale à $a^2 + 1$. D'autres satins, d'une définition moins simple, sont dans le même cas. (VOIR LAISANT, A. F., 1877.)

17. Déformons le satin n_a de manière que, la première ordonnée restant à sa place, la a^e , qui a pour valeur α , devienne la 2^e ; la α^e , qui a pour valeur β , devienne la 3^e ; la β^e , qui a pour valeur γ , devienne la 4^e ; ... la k^e ordonnée sera $\equiv a^k$, et on aura de cette sorte le graphique des solutions de la congruence $a^x \equiv y$. Ainsi, pour $a = 10$, n n'étant ni pair, ni multiple de 5, la figuration sera celle de la période décimale du quotient de 1 par n . (LAISANT).

De même, soit à trouver les restes de la division de a^k par n : on cherchera ceux de la division par n des nombres $a, 2a, 3a, \dots$: le reste de a est a ; celui α de a^2 est le a^e reste ; celui β de a^3 est le α^e reste ; ... (ARNOUX).

18. La théorie des satins a été donnée par GAND en 1867, dans le *Bull. de la Soc. d'Amiens*. L'application suivante, due au même auteur (*le Transpositeur ou Improvisateur de tissus*, Paris 1871), montrera le parti qu'on peut en tirer dans l'industrie textile, pour obtenir des motifs nouveaux, en nombre indéfini.

On a une bande de papier divisée en vingt-neuf carrés égaux, de diverses nuances (fig. 6), qu'on déplace successivement de sa largeur ; mais en la montant, la première fois de $R \frac{12}{29}$ cases¹ ; la seconde fois, de $R \frac{2.12}{29}$ cases ; la troisième fois, de $R \frac{3.12}{29}$ cases ; la quatrième, de $R \frac{4.12}{29}$ cases ; ... : on

¹ On entend par le symbole $R \frac{a}{b}$, le reste de la division de a par b .

aura ainsi un *satin carré composé*, de 29^2 cases, dont une partie est donnée, fig. 7.

19. Si dans l'expression $u^2 + kv$, u et v désignent tous les entiers imaginaires possibles, et k , l'imaginaire fixe $\alpha + \beta i$; cette expression prendra une infinité de valeurs de la forme $x + yi$, qu'on représentera en hachurant la case (x, y) , c'est-



Fig. 6.

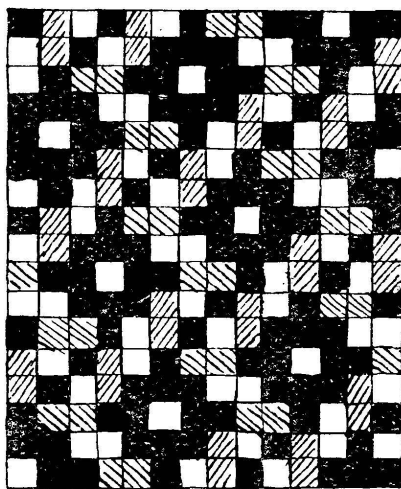


Fig. 7.

à-dire la y^e case de la x^e colonne verticale. Si en outre, $x + yi$ est divisible par $\alpha + \beta i$, la case (x, y) sera entièrement noire. Cette représentation a été proposée par THIELE, en 1873. (Voir *A. F.* 1874.)

Si $k = 1 + i$, on aura un damier de cases noires et de cases grises. Si $\beta = 0$, le dessin est encore assez simple, car il dérive du damier. Mais dans le cas général, il présente un ensemble de motifs élégants mais compliqués, simulant chacun quatre spirales grises ou blanches autour de chaque case noire : voir par exemple les fig. 8 et 9¹.

¹ Voir aussi (*op. cit.*), outre ces deux figures, et celles qui seront décrites plus loin, surtout celles qui correspondent aux valeurs $k = 8 + 5i$, $8 + 7i$, $10 + i$ et $17 + 8i$, données par BROCH.

20. On peut d'abord vérifier que *les cases noires des dessins de Thiele forment le satin carré de module $n = \alpha^2 + \beta^2$* . En effet, si $x + yi$ est divisible par $\alpha + \beta i$, $(x + yi)(\alpha - \beta i)$

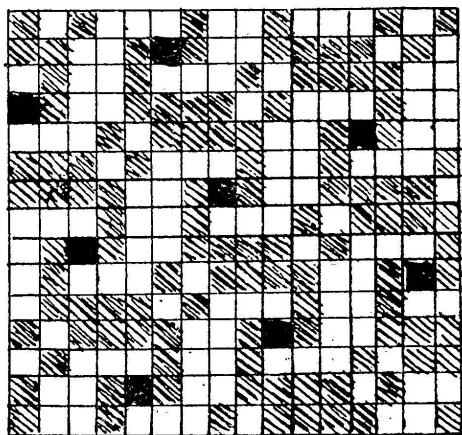


Fig. 8

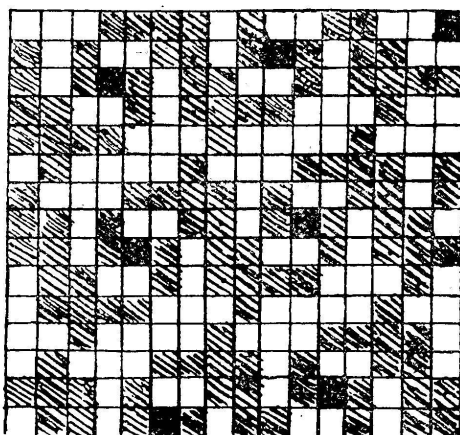


Fig. 9.

$= (\alpha x + \beta y) + (\alpha y - \beta x)i$ est divisible par $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$, ce qui a lieu si les deux expressions $A = \alpha x + \beta y$ et $B = \alpha y - \beta x$ le sont, conditions qui n'en font qu'une, car on a :

$$\alpha A + \beta B = nx,$$

d'où on conclut que la divisibilité de A entraîne celle de B . On a donc bien $\alpha x + \beta y \equiv 0$, ce qui caractérise un satin carré (15).

Les cases grises correspondantes, dans les diverses répétitions du motif, forment des satins identiques, mais placés d'une manière différente. Soit en effet

$$u = u' + u''i, \quad v = v' + v''i;$$

il viendra

$$\alpha x + \beta y = \alpha u'^2 + 2\beta u'u'' - \alpha u''^2 + uv',$$

d'où

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha x + \beta y) &\equiv \alpha^2 u'^2 + 2\alpha\beta u'u'' - \alpha^2 u''^2 \equiv \alpha^2 u'^2 + 2\alpha\beta u'u'' + \beta^2 u''^2 \\ &\equiv (\alpha u' + \beta u'')^2. \end{aligned}$$

Ainsi la case (x, y) est grise si $\alpha(\alpha x + \beta y)$ est un résidu, ce qui permet d'exécuter la construction assez aisément. Mais les considérations qui suivent la rendent encore beaucoup plus facile.

Soit (ξ, η) une case noire, c'est-à-dire telle que $\alpha\xi + \beta\eta \equiv 0$; chaque case grise (ξ, y) de la même colonne est déterminée par la relation $\alpha(\alpha\xi + \beta y) \equiv r$, r désignant l'un des résidus de n . De là, la condition $\alpha\beta(y - \eta) \equiv r$. Or de $\alpha^2 + \beta^2 = n \equiv 0$, on tire $(\alpha + \beta)^2 \equiv 2\alpha\beta$; $2\alpha\beta$ est donc résidu, et $\alpha\beta$ est ou n'est pas résidu en même temps que 2. Le nombre $\alpha\beta$ et par suite le nombre $y - \eta$, sont donc résidus si n est un nombre premier $8 + 1$ ($k = 4 + i, 5 + 4i, 8 + 3i, 8 + 5i, 8 + 7i, 9 + 4i, 11 + 4i, 12 + 7i, 13 + 8i, \dots$) et non-résidu si n est un nombre premier $8 + 5$ ($k = 2 + i, 3 + 2i, 5 + 2i, 5 + 4i, 6 + i, 6 + 5i, 7 + 2i, 10 + i, 10 + 3i, 10 + 7i, 10 + 9i, \dots$). Par conséquent, les valeurs de r étant 1, r , r' , r'' , ... la 1^{ère}, la r^e , la r'^e , la r''^e , ... case située au-dessus d'une case noire sera grise ou blanche, suivant les deux cas qui viennent d'être indiqués¹. Ainsi

$$\text{pour } k = \begin{cases} 2 + i, \\ 3 + 2i, \\ 4 + i, \\ 5 + 2i, \\ 8 + 7i, \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{les cases grises sont} \\ \text{celles qui précèdent} \\ \text{ou suivent les cases} \\ \text{noires de} \end{array} \right\} \begin{cases} 2 \text{ rangs;} \\ 2, 5 \text{ rangs;} \\ 1, 2, 4, 8 \text{ rangs;} \\ 2, 3, 8, 10, 11, 12, 14 \text{ rangs;} \\ (1, 2, 4, 7, 8, 9, 11, 13, 14, \\ 15, 16, 18, 22, 25, 26, 28, 30, \\ 31, 32, 36, 41, 44, 49, 53, \\ 56 \text{ rangs.} \end{cases}$$

Les figurations de Thiele ne sont donc autres qu'une application très particulière; — mais à la vérité très intéressante, — de la méthode de Gand, celle où la y^e case de l'ordonnée mobile (fig. 6) est grise ou blanche selon que y est un résidu ou un non-résidu.

21. Les problèmes du tissage constituent une application des plus intéressantes de la théorie élémentaire des nombres et sont très propres à en faire saisir les méthodes. Il semble donc que la construction des congruences concrètes ainsi réalisées est un bon exercice, à différents points de vue, et qu'un mot sur les combinaisons de carreaux serait à sa place dans un traité sur les nombres.

¹ Dans le premier de ces deux cas, la figure ne change pas quand on la fait tourner d'un quart de tour; dans le second cas, les cases grises sont changées en cases blanches et vice versa.

La combinaison la plus simple est le damier indéfini. On peut le généraliser en le déformant de plusieurs manières ; par exemple on peut augmenter les largeurs de la $(kb)^{me}$ colonne et de la $(kb)^{me}$ rangée, k prenant les valeurs $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Le cas de $a = 3$ et $b = 5$ est fréquemment employé.

On aurait d'autres dérivés du damier de n^2 cases, n désignant un nombre impair, en mettant noire ou blanche la case (x, y) selon que $R \frac{xy}{n}$, ou $R \frac{x^2 + y^2}{n}$, etc., est pair ou impair ; ou encore selon que xy est congru à un résidu ou à un non-résidu. Cette étude sera développée plus tard.

Les effets des diagonales donnent des motifs bien plus variés¹. On peut réunir plusieurs bandes en diagonales ; les couder en zigzags ; les briser ; les couder et les briser, à chaque coude ou à chaque rangée ; alterner les nuances, de k rangées en k rangées.

Mais c'est surtout avec la méthode si simple de Gand, pour les satins (18), qu'on obtient les résultats les plus élégants et les plus variés. Ainsi la fig. 6, qui par son ascension successive de douze cases, produit la fig. 7, peut en donner douze autres, en effectuant des ascensions de deux, trois, quatre cases ; ces sortes de cristallisations différentes des mêmes carreaux de la fig. 6 étonneront par l'inattendu des motifs obtenus : celles qui correspondent aux nombres 3, 7, 8, 9, 11, 13 surtout en donnent de très jolis. Pour plus de facilité, on ne prendra que les cases noires².

22. Le cas du satin dont le module n est un nombre premier réel p , mérite un examen spécial. Il ne peut y avoir alors, que dans un seul cas, un nombre a qui soit l'associé de son complément, c'est-à-dire tel que $a^2 + 1 \equiv 0$. Soit en effet $b^2 + 1 \equiv 0$; il viendra $a^2 - b^2 \equiv 0$ ou $(a + b)(a - b) \equiv 0$, d'où $a + b \equiv 0$ et $b = p - a$. Le groupe $a, \alpha = p - a$ ne peut donc se présenter qu'une fois. D'un autre côté,

¹ Voir par exemple le *Cours de tissage*, de GAND, ou le *Traité* de BONNA, etc.

² Le moyen mécanique suivant permet de construire un satin composé, sans aucun calcul, à l'aide de cubes noirs et blancs. Construisons avec ces cubes k colonnes identiques ; montons de h rangs les $k - 1$ dernières colonnes et remplaçons d'un bloc au-dessous les cubes qui dépassent en haut ; montons de même de h rangs les $k - 2$ dernières colonnes et remplaçons d'un bloc au bas les cubes qui dépassent au-dessus ; montons de même les $k - 3$ dernières colonnes et remplaçons au bas les cubes excédents ; et ainsi de suite.

il n'y a que les nombres 1 et $p - 1$ qui soient leurs propres associés, car la congruence $x^2 \equiv 1$ donne $(x + 1)(x - 1) \equiv 0$, d'où $x \equiv 1$ et $x \equiv -1$.

Si p est un nombre premier $4 + 1$, les entiers 2, 3, 4, ... $p - 3$ se partagent en $\frac{p-5}{4}$ groupes de quatre nombres associés ou complémentaires, et en un groupe des deux nombres a, α , à la fois associés et complémentaires. On a ainsi $a^2 + 1 \equiv 0$. Donc *tout nombre premier $4 + 1$ divise une somme de deux carrés.*

Si p est un nombre premier $4 - 1$, les mêmes entiers se partagent en $\frac{p-3}{4}$ groupes de quatre nombres complémentaires ou associés, et de plus distincts ; car autrement on aurait plus d'une fois $x(p - x) \equiv 1$. On ne peut donc écrire $x^2 + 1 \equiv 0$ et *aucun nombre premier $4 - 1$ ne divise une somme de deux carrés et à fortiori ne peut être une somme de deux carrés.*

Ainsi les seuls nombres premiers $4 + 1$ divisent $x^2 + 1$, et même $y^2 + \xi^2$, en faisant $x\xi \equiv y$. Or dans ce cas, le satin est formé de carrés ayant tous p pour côté et inclinés sur les axes : p est donc lui-même de la forme $x^2 + y^2$ et on a la démonstration de ce théorème de Fermat : *tout nombre premier $4 + 1$ est décomposable en une somme de deux carrés, — en même temps que la décomposition de p .* (ED. LUCAS).

On peut remarquer en outre que pour $p = 4 - 1$, les entiers 1, 2, 3, ... $p - 1$ se partagent en $\frac{p-3}{4}$ groupes de quatre termes $g, \gamma, p - g, p - \gamma$, tels que $g\gamma \equiv t$, et un groupe h et $p - h$ tel que $h^2 \equiv t$ ou $h(p - h) \equiv t$. Ainsi, pour $p = 4 - 1$, on a, quelque soit t , l'une ou l'autre des deux congruences $x^2 \equiv t, x^2 \equiv -t$. Mais de t à $p - t$, il y a au moins deux valeurs, $s, s + 1$, qui donnent l'une $y^2 \equiv s, z^2 \equiv -(s + 1)$; d'où, en additionnant, $y^2 + z^2 + 1 \equiv 0$, ce qui démontre cette proposition d'EULER : *le nombre premier $p = 4 - 1$ divise toujours une somme de trois carrés, dont l'un est l'unité.*

23. Désignant par 1, $a, b, \dots, n - 1$, les $\varphi(n)$ nombres plus petits que n et premiers avec lui ; traçons dans le quinconce module n , les droites $y = x, y = ax, y = bx, \dots$ et notons.

ces droites par les indications 1, a , b , ... (fig. 10 et 11); on aura la *table de division (mod. n)*¹, de M. ARNOUX (*F. Arith.*,

8	4				2	7				5	1
7	8				4	5				1	2
6	3	2	5	8	6	3	1	4	7	6	3
5	7				8	1				2	4
4	2				1	8				7	5
3	6	1	4	7	3	6	2	5	8	3	6
2	1				5	4				8	7
1	5				7	2				4	8
1	2		3		4	5		6		7	8

Fig. 10

Paris 1894). Il est aisé de voir que le nombre (x, y) satisfait à la condition $x(x, y) \equiv y$, ce qui montre qu'il n'est autre

12	6	4	3	5	2	11	8	10	9	7	1
11	12	8	6	10	4	9	3	7	5	1	2
10	5	12	9	2	6	7	11	4	1	8	3
9	11	3	12	7	8	5	6	1	10	2	4
8	4	7	2	12	10	3	1	11	6	9	5
7	10	11	5	4	12	1	9	8	2	3	6
6	3	2	8	9	1	12	4	5	11	10	7
5	9	6	11	1	3	10	12	2	7	4	8
4	2	10	1	6	5	8	7	12	3	11	9
3	8	1	4	11	7	6	2	9	12	5	10
2	1	5	7	3	9	4	10	6	8	12	11
1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Fig. 11

que le quotient par x , du nombre y augmenté d'un certain multiple de n .

Cette table jouit de nombreuses propriétés, dont celles-ci :

Elle donne immédiatement la solution de l'équation $ax - nz = b$.

Un terme quelconque est l'associé de son abscisse, car $x(x, 1) \equiv 1$.

L'une des diagonales ne contient que le terme 1, et l'autre,

¹ Entrevue par Euler, et Gand.

le nombre $n - 1$. En général, dans une même parallèle à une diagonale, deux termes également éloignés des extrêmes sont associés, ce qui suit de ce que les relations

$$x(x, y) \equiv y \quad \text{et} \quad y(y, x) \equiv x, \quad x(x, y) \equiv y$$

$$\text{et. } (n - y)(n - y, n - x) \equiv n - x$$

donnent par multiplication les suivantes

$$(x, y)(y, x) \equiv 1 \quad \text{et} \quad (x, y)(n - y, n - x) \equiv 1 .$$

De même, le produit de deux termes voisins dans la parallèle la plus voisine de la diagonale $y \equiv x$ est congru au terme de la deuxième parallèle compris entre ceux-ci. En général, si on considère un carré de termes ABCD ayant le sommet A sur cette diagonale, le produit des nombres situés aux sommets B, C, est congru à celui du sommet D, c'est-à-dire qu'on a :

$$(x, n - x + k)(x + k, n - x) \equiv (x + k, n - x + k) .$$

24. Si on déplace les colonnes de la table de division (mod n), de telle manière que les nombres de la rangée inférieure soient à leurs places naturelles, on aura la *table de multiplication* (mod n), du même auteur, et dont un terme

						12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
						11	9	7	5	3	1	12	10	8	6	4	2
						10	7	4	1	11	8	5	2	12	9	6	3
						9	5	1	10	6	2	11	7	3	12	8	4
8	7	3	4	3	1	8	3	11	6	1	9	4	12	7	2	10	5
7	5	1	8	4	2	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6
6	3	6	3	6	3	6	12	5	11	4	10	3	9	2	8	1	7
5	1	2	7	8	4	5	10	2	7	12	4	9	1	6	11	3	8
4	8	7	2	1	5	4	8	12	3	7	11	2	6	10	1	5	9
3	6	3	6	3	6	3	6	9	12	2	5	8	11	1	4	7	10
2	4	8	1	5	7	2	4	6	8	10	12	1	3	5	7	9	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12						

Fig. 12.

Fig. 13.

quelconque est défini par la relation $(x, y) \equiv xy$. La g^{e} colonne de la première table est devenue la γ^{e} de la seconde, γ étant l'associé de g (fig. 12 et 13).

Les coordonnées du terme 1 sont des nombres associés, puisque, dans ce cas, on a $xy \equiv 1$.

Les nombres de la diagonale $y = x$ sont les résidus de n , et ceux de l'autre diagonale, leurs compléments à n .

25. GAUSS, le premier, s'est avisé du rôle que peut jouer le quinconce pour représenter les lois des nombres entiers, quantités essentiellement discontinues auxquelles la géométrie ne semble pas, à priori, pouvoir s'appliquer. Il paraît même avoir, par ce moyen, fait quelques-unes de ses découvertes, entre autres celle de la composition des formes.

EISENSTEIN ainsi que HERMITE et MINKOWSKI ont également utilisé le même moyen et se sont rencontrés avec Gauss en plusieurs points.

BRAVAIS a employé les quinconces du plan et de l'espace, en vue de ses études cristallographiques (*J. E. P.*, 1850).

LEBESGUE s'en est servi pour expliquer la formation des tables de diviseurs numériques (*Tables...*, 1862).

Mais c'est surtout GAND qui, par sa théorie des satins, en a montré l'importance, tant comme figuration du lemme fondamental, que par celle des propriétés des formes $x^2 - 1$ et $x^2 + 1$. Son objectif était simplement la régularisation des procédés empiriques suivis jusqu'à-là dans l'industrie textile ; mais Ed. LUCAS a repris cette théorie au point de vue mathématique et avait projeté d'écrire une *Géométrie du tissage*, dont on n'a que quelques aperçus¹.

Comme cela a été dit plus haut, la théorie générale du quinconce a été poursuivie ces dernières années jusque dans les applications les plus élevées de l'arithmétique. On étudiera avec fruit sur ce sujet la *Neuere Zahlentheorie* de BACHMANN (Leipzig, 1907).

L'idée de Thiele, de représenter les résidus quadratiques imaginaires² ne paraît pas avoir fixé l'attention, autant qu'elle le méritait : toutefois ce qui en a été dit plus haut semble suffisant pour faire connaître ce qui pourrait en être dit dans un traité élémentaire.

A. AUBRY (Dijon).

¹ Il a montré aussi les rapports de cette théorie avec celle de certains carrés magiques qu'il a appelés diaboliques.

² Il a aussi montré à représenter les résidus cubiques, en employant trois directrices faisant entre elles des angles de 60° .