démonstration du théorème d'Arnoux.

Autor(en): **Hayashi, T.**

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1910)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Le produit sera 6272.

De même, 38×95 donnerait immédiatement 33 centaines et 62×5 ou 310 unités, soit 3610 comme produit.

Voici maintenant un troisième exemple, relatif à deux facteurs de 3 chiffres, l'un de ces facteurs étant compris entre 990 et 1000. Soit 749×998. $A - B' = 749 - 2 = 747$ nous représente des milliers ; $A'B' = 251 \times 2 = 502$, des unités.

Le produit est 747502.

On appliquerait encore la même règle avec facilité à deux facteurs de 4 chiffres, l'un de ces facteurs étant compris entre 9990 et 10 000.

En général, lorsque B' n'a qu'un chiffre, la formation du produit $A'B'$ n'offre aucune difficulté, avec un peu d'exercice ; car on *voit* le complément A' formé suivant le procédé classique.

Parmi les applications possibles de la règle qui précède, il y a lieu d'indiquer :

La formation des puissances de 9 ;

Les produits dont les facteurs se composent du chiffre 9 répété plusieurs fois ;

Ceux de deux nombres voisins de 100, etc.

Il y en aurait sans doute bien d'autres encore. J'ai voulu me borner à montrer quel parti on peut tirer des compléments arithmétiques dans les exercices de calcul mental.

Albert Lecomte (Romorantin).

Une démonstration du théorème d'Arnoux.

M. C.-A. Laisant présente, dans l'*Enseignement mathématique*, Xe année (p. 220-225, 1908), un nouveau théorème d'arithmétique dû à M. G. Arnoux et que celui-ci a établi implicitement dans son « *Arithmétique Graphique* (introduction à l'étude des fonctions arithmétiques) », p. 29-31, 1906).

M. G. Tarry, de même que M. Laisant, reconnaît la portée de ce théorème, qui paraît jouer un rôle important dans certains domaines de l'arithmétique.

Bien que la démonstration de M. Laisant soit simple et élégante, il n'est cependant pas inutile de donner une autre démonstration de cet intéressant théorème, dont voici l'énoncé :

Théorème d'Arnoux. — *Soit* $M = m_1\, m_2 \ldots m_n$ *un nombre composé, dont les facteurs* $m_1, m_2, \ldots m_n$ *sont premiers entre eux deux à deux ; appelons* $\mu_1, \mu_2, \ldots$ *les quotients* $\frac{M}{m_1} = m_2\, m_3 \ldots m_n, \ldots\ldots$ *Si* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *sont des nombres tels que l'on ait*

$$a_1\mu_1 = \text{mult. } m_1 + r, \qquad a_2\mu_2 = \text{mult. } m_2 + r, \ldots a_n\mu_n = \text{mult. } m_n + r,$$

il s'ensuit qu'on aura aussi

$$a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \ldots\ldots + a_n \mu_n = \text{mult. M} + r.$$

Voici ma démonstration :

Si m_1 et r avaient un facteur commun, ce facteur diviserait aussi m_2, à cause de la seconde équation de condition, $a_2 \mathrm{M}_2 = \text{mult.}\ m_2 + r$, m_1 et m_2 auraient alors un facteur commun, ce qui est contraire à l'hypothèse m_1 et m_2 premiers entre eux. Par conséquent m_1 et r sont premiers entre eux.

Un raisonnement analogue montre que m_2, m_3, ... m_n, et par conséquent M lui-même, sont premiers avec r.

En considérant les équations de condition, on voit que le produit

$$(r - a_1 \mu_1)(r - a_2 \mu_2)(r - a_3 \mu_3) \ldots\ldots (r - a_n \mu_n),$$

c'est-à-dire

$$r^n - \Sigma a_1 \mu_1 r^{n-1} + \mathrm{P}r^{n-2} + \mathrm{Q}r^{n-3} + \ldots\ldots + \mathrm{S}r + \mathrm{T},$$

est divisible par le produit $m_1 m_2 m_3 \ldots m_n$, donc par M.

Les coefficients P, Q, ..., S, T sont évidemment divisibles par M, puisque les produits de 2, 3 ou un plus grand nombre de μ_1, μ_2, ..., μ_n, sont divisibles par M.

Par conséquent $r^n - \Sigma a_1 \mu_1 r^{n-1}$ est divisible par M.

r^{n-1} et M sont premiers entre eux; donc $r - \Sigma a_1 \mu_1$ est divisible par M.

T. HAYASHI (Tokio).

A propos d'un article de M. Kariya concernant un théorème sur le triangle.

Je vois (avec un peu de retard) que dans l'*Enseignement Mathématique,* M. KARIYA (Tokio) a exposé un théorème sur le triangle *(E. M.,* 1904, p. 130), lequel a donné lieu à un certain nombre de remarques intéressantes (même année, p. 236, et année 1905, p. 44).

Le même théorème et la plupart des remarques auxquelles il a donné lieu, ont été donnés par moi, dans le *Journal de Math. Spéciales* de M. G. DE LONGCHAMPS *(année 1890,* page 104 et suiv., page 124 et suiv.), dans un article intitulé : *Sur un groupe de quatre coniques remarquables du plan d'un triangle.* Je donne, en outre, dans le même Recueil, p. 265, un petit article intitulé : *Problème sur le triangle,* qui généralise beaucoup le théorème de Kariya.

Je ne crois pas qu'il faille attacher une trop grande importance