Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1910)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POUR UNE THÉORIE DE LA MESURE

Autor: COMBEBIAC, G.

Kapitel: §III.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12775

priétés générales des continus, les propriétés (*a*) et (*b*) de la relation d'égalité qui définit une métrique. Il suffira de rappeler que la notion de rapport s'établit, par les procédés classiques[1], au moyen de ces deux propriétés des continus : divisibilité d'un segment quelconque en n segments égaux entr'eux et existence, deux segments quelconques étant donnés, de multiples de l'un plus grands que l'autre (axiome d'Archimède).

On sait que ces deux propriétés appartiennent aussi à l'ensemble des nombres rationnels ; cet ensemble admet, par conséquent, des métriques ayant les mêmes caractères essentiels. Dès lors une remarque s'impose. Rien n'empêche de substituer, dans toutes les applications des Mathématiques, l'ensemble des nombres rationnels à l'ensemble des nombres réels[2]. Il est évident que la précision que comporte l'expression mathématique n'en resterait pas moins illimitée, seulement le rapport de deux segments serait toujours rationnel, les segments devenant tous, par hypothèse, commensurables entr'eux.

Il est clair que, dans la pratique, rien ne serait changé dans la manière d'opérer actuelle ; mais l'on peut conclure de là que, contrairement à une idée courante, la notion de nombre irrationnel n'est nullement inhérente à celle de mesure et qu'elle n'est nullement nécessaire aux applications mathématiques ; cette notion appartient donc essentiellement et exclusivement, — ainsi que le fait d'ailleurs observer M. F. KLEIN dans son profond ouvrage : *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie*, — au domaine des *Mathématiques exactes*, c'est-à-dire à l'analyse numérique.

§ III.

On a vu qu'à toute métrique est associée une opération sur les segments ou plutôt sur leurs grandeurs, qui peut être définie de la manière suivante :

---

[1] Cf. R. BAIRE, *Leçons sur les Théories générales de l'Analyse*, p. 33 à 39 ; Gauthier-Villars, Paris, 1907.

[2] Il suffit, pour cela, de convenir que tout segment est un ensemble *dense* et *dénombrable ;* cette convention remplacerait simplement celle qui affirme l'existence des éléments limites et qui est spéciale aux continus.

La grandeur d'un segment formé par l'ensemble de deux segments dont l'un a pour élément initial le dernier élément de l'autre ne dépend évidemment que des grandeurs a et b des segments composants ; on l'appellera *somme* de ces grandeurs et on la désignera par $a+b$. L'opération binaire ainsi définie pour les grandeurs peut être appelée « opération d'addition ».

De deux segments ayant le même élément initial et ayant des grandeurs différentes a et b si le premier contient le second, on écrira $a > b$, la relation étant évidemment indépendante de l'élément initial choisi. On définit ainsi une relation d'ordre pour les grandeurs des segments.

En s'appuyant sur les propriétés (a) et (b) caractéristiques des relations d'égalité métriques, on démontre facilement que les opérations d'addition possèdent les propriétés suivantes :

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{lll} (1) & a+b=x\,, & \text{a toujours une solution en } x\,, \\ (2) & a+b>a\,, & \\ (3) & \text{si} \quad b>a\,,\ a+x=b & \text{a toujours une solution en } x\,, \\ (4) & (a+b)+a=a+(b+c)\,. & \end{array} \right.$$

On reconnaîtra sans difficulté que, si l'on a défini, pour les segments ayant une même origine, une opération binaire possédant les propriétés (I), elle permettra de définir une relation d'égalité métrique et, par suite, une métrique.

La propriété essentielle des opérations d'addition est l'*associativité* exprimée par la formule (4). Quant à la *commutativité,* qui n'est pas indispensable, l'on reconnaît facilement qu'elle équivaut à la propriété supplémentaire des relations d'égalité qui permettrait de substituer à la condition (b) la proposition suivante : *deux segments composés de parties respectivement égales sont égaux ;* cette propriété est évidente, notamment, lorsqu'il est possible de diviser deux segments quelconques en parties toutes égales entr'elles.

A toute métrique est associé un *groupe de tranformations* que l'on peut définir de la manière suivante : m_0 et m_1 étant deux éléments fixes, à tout élément m de l'ensemble situé à droite de m_0 on peut faire correspondre un autre élément m' tel que l'on ait :

$$(m_1\,,\ m') = (m_0\,,\ m)\ .$$

On détermine ainsi une application (au moins partielle) de l'ensemble sur lui-même, c'est-à-dire une *transformation*. Si l'élément m_1 est considéré comme un paramètre variable, on obtient ainsi une série de transformations, et il est facile de reconnaître que la proposition (b) exprime précisément la condition pour que ces transformations forment un groupe, c'est-à-dire pour que la transformation obtenue par l'application successive de deux d'entre elles appartiennent aussi à la série. Il est évident en outre que ces transformations *conservent la métrique*, c'est-à-dire que les segments transformés de deux segments égaux sont encore égaux.

En désignant par a la grandeur du segment (m_0, m_1), qui joue le rôle de paramètre, l'équation du groupe peut s'écrire :

$$(m_0, m') = a + (m_0, m) \; ,$$

et, si b est le paramètre d'une transformation du groupe faisant correspondre à l'élément m' un élément m'', on aura :

$$(m_0, m'') = b + (m_0, m') = b + a + (m_0, m) \; .$$

Le paramètre de la transformation résultante est donc $b + a$.

A la métrique est associé un autre groupe de transformations, qui peut être défini par l'égalité :

$$(m, m') = a \; ,$$

où a est un segment qui détermine la transformation dans le groupe. En appliquant ensuite la transformation

$$(m', m'') = b \; ,$$

on obtient évidemment la transformation

$$(m, m'') = a + b \; ,$$

qui appartient bien à la série, ce qui prouve que celle-ci constitue bien un groupe.

Lorsque l'opération d'addition afférente à la métrique est commutative, les deux groupes se confondent ; c'est le cas pour les continus, pour lesquels l'équation du groupe prend la forme :

$$f(x') - f(x) = a \; .$$

On verrait enfin que l'on peut aussi définir la métrique en fonction de l'un des groupes de transformations qui lui sont associés.

Une métrique peut donc être définie de trois manières différentes, savoir : au moyen d'une *relation d'égalité* applicable aux segments et pouvant être déterminée, dans le cas des continus, par une fonction numérique de deux éléments, au moyen d'une *opération d'addition* définie pour les segments, enfin au moyen d'un *groupe de transformations* se rapportant aux éléments mêmes de l'ensemble ordonné primitif. Ces trois points de vue se complètent l'un l'autre et les trois modes de définition peuvent trouver des applications dans le domaine physique.

On examinera dans un prochain article de quelle manière doit être généralisée la notion de mesure pour pouvoir s'appliquer aux continus à plusieurs dimensions.

G. Combebiac (Montauban).

SUR LE MOMENT MAGNÉTIQUE

A PROPOS DES DEUX SIGNIFICATIONS DU TERME DE MOMENT DANS LA MÉCANIQUE

ET SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ MAGNÉTIQUES

I. — **Centre de gravité et équilibre d'un corps pesant tournant autour d'un point fixe.** — Rappelons que dans la théorie des forces parallèles, on appelle *moment d'une force par rapport à un plan* le produit de la force par la distance de son point d'application au plan, et qu'on démontre que le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes. Etant donnée une force de direction constante et proportionnelle à l'élément de masse, telle que la pesanteur, et un système d'axes rectangulaires dont l'origine est choisie arbitrairement, on détermine la position du centre