§II.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1910)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

§ II.

Une relation d'égalité de l'espèce définie plus haut est alors exprimée par l'égalité des valeurs d'une fonction numérique binaire et le problème revient, par suite, à déterminer les fonctions $F(x_1, x_2)$ de deux variables qui satisfont aux deux conditions suivantes, équivalentes aux conditions (a) et (b).

a') $F(x_1, x_2)$ est une fonction croissante de x_2, décroissante de x_1 et prend toutes les valeurs comprises entre ses valeurs extrêmes lorsque l'une des variables décrit un segment ;

b') il existe une relation entre les valeurs des trois expressions $F(x_1, x_2)$, $F(x_1, x_3)$, $F(x_2, x_3)$.

En se bornant aux fonctions analytiques (ou, du moins, dérivables), il est facile de déterminer la forme générale des fonctions possédant la propriété (b').

Les expressions $F(x_1, x_2)$, $F(x_1, x_3)$ et $F(x_2, x_3)$ peuvent en effet être considérées comme trois fonctions de trois variables indépendantes x_1, x_2 et x_3 ; la condition pour qu'il existe une relation entre ces trois fonctions est que leur déterminant fonctionnel soit nul, ce qui s'écrit, en désignant respectivement par F'_1 et F'_2 les fonctions dérivées de F par rapport à ses deux arguments,

$$F'_1(x_1, x_2)\, F'_1(x_2, x_3)\, F'_2(x_1, x_3) + F'_2(x_2, x_3)\, F'_2(x_1, x_2)\, F'_1(x_1, x_3) = 0$$

ou

$$F'_1(x_1, x_2)\, \frac{F'_2(x_1, x_3)}{F'_1(x_1, x_3)} + F'_2(x_1, x_2)\, \frac{F'_2(x_2, x_3)}{F'_1(x_2, x_3)} = 0 .$$

En égalant x_3 à une constante et posant

$$\int \frac{F'_2(x, x_3)}{F'_1(x, x_3)}\, dx = f(x) ,$$

l'égalité précédente est une équation aux dérivées partielles en x_1 et x_2 et sa solution générale est

$$F(x_1, x_2) = \Phi\left[f(x_2) - f(x_1)\right] .$$

Il est vraisemblable que ce résultat est indépendant de la condition de dérivabilité, qui a été admise pour sa démonstration, et que les fonctions non dérivables ou même discontinues satisfaisant à la condition (b') doivent pouvoir se mettre sous la forme précédente. Mais, pour satisfaire aux conditions (a'), il est nécessaire que $f(x)$ soit une fonction croissante ou décroissante, toujours déterminée et prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ (elle est, par suite, continue).

Il est évident d'ailleurs que toute fonction de F définit la même métrique, car elle définit la même relation d'égalité pour les segments. Parmi les fonctions définissant la même métrique, une jouit de propriétés particulières, c'est

$$f(x_2) - f(x_1) \ ;$$

pour cette fonction la relation fondamentale prend la forme

$$f(x_3) - f(x_1) = \Big[f(x_2) - f(x_1)\Big] + \Big[f(x_3) - f(x_2)\Big] \ .$$

Deux segments quelconques (x_1, x_2) et (x_3, x_4) donnent toujours lieu à un nombre défini par l'expression

$$a = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

et qui est leur *rapport* dans la métrique considérée. Les rapports des divers segments à un segment choisi arbitrairement sous le nom d'*unité* sont dits les *mesures* de ces segments.

Observons enfin que rien n'empêche de prendre pour abscisse $f(x)$, de sorte qu'une fonction métrique pourra toujours se mettre sous la forme $x_2 - x_1$.

L'exposé précédent a été développé sur l'ensemble numérique afin de simplifier les démonstrations et de pouvoir s'appuyer sur des propriétés connues. Mais il est facile de se rendre compte que les résultats, dans ce qu'ils ont d'essentiel, peuvent être établis au moyen de raisonnements directement développés sur les continus, indépendamment de toute application préalable de ces derniers sur l'ensemble numérique, et en faisant seulement intervenir, outre les propriétés générales des continus, les propriétés (a) et (b) de la relation d'égalité qui définit une métrique. Il suffira de rappeler que la notion de rapport s'établit, par les procédés classiques[1], au moyen de ces deux propriétés des continus : divisibilité d'un segment quelconque en n segments égaux entr'eux et existence, deux segments quelconques étant donnés, de multiples de l'un plus grands que l'autre (axiome d'Archimède).

On sait que ces deux propriétés appartiennent aussi à l'ensemble des nombres rationnels ; cet ensemble admet, par conséquent, des métriques ayant les mêmes caractères essentiels. Dès lors une remarque s'impose. Rien n'empêche de substituer, dans toutes les applications des Mathématiques, l'ensemble des nombres rationnels à l'ensemble des nombres réels[2]. Il est évident que la précision que comporte l'expression mathématique n'en resterait pas moins illimitée, seulement le rapport de deux segments serait toujours rationnel, les segments devenant tous, par hypothèse, commensurables entr'eux.

Il est clair que, dans la pratique, rien ne serait changé dans la manière d'opérer actuelle ; mais l'on peut conclure de là que, contrairement à une idée courante, la notion de nombre irrationnel n'est nullement inhérente à celle de mesure et qu'elle n'est nullement nécessaire aux applications mathématiques ; cette notion appartient donc essentiellement et exclusivement, — ainsi que le fait d'ailleurs observer M. F. Klein dans son profond ouvrage : *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie*, — au domaine des *Mathématiques exactes*, c'est-à-dire à l'analyse numérique.

§ III.

On a vu qu'à toute métrique est associée une opération sur les segments ou plutôt sur leurs grandeurs, qui peut être définie de la manière suivante :

---

[1] Cf. R. Baire, *Leçons sur les Théories générales de l'Analyse*, p. 33 à 39 ; Gauthier-Villars, Paris, 1907.

[2] Il suffit, pour cela, de convenir que tout segment est un ensemble *dense* et *dénombrable ;* cette convention remplacerait simplement celle qui affirme l'existence des éléments limites et qui est spéciale aux continus.