les cinq suivantes,

$$p_{12} : (x_1 y_2 - x_2 y_1) = p_{13} : (x_1 y_3 - x_3 y_1) = \dots$$

et regarder les μ, les x et les y comme des paramètres ; on a un système de relations qui représente une ou plusieurs variétés algébriques et, d'après les recherches de L. Kronecker, chacune de celles-ci peut être représentée par des équations, en nombre égal ou inférieur à six, ne contenant que les six variables homogènes p_{ik}.

M. STUYVAERT (Gand).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur une question élémentaire de maximum.

1. — Pour déterminer élémentairement le maximum de certaines fonctions, on fait usage du théorème :

A. *Le produit de* n *nombres positifs, dont la somme est constante, est maximum* LORSQUE *les nombres sont égaux entre eux.*

Avec la démonstration ordinaire on entend prouver que : *si le produit est maximum, les nombres ne peuvent pas être non égaux.* Le mot LORSQUE du théorème A exprime donc que : *si le produit est maximum, les facteurs sont égaux.* Mais alors le théorème A est faux. Que l'on considère, par exemple, les produits

$$(6 - \sin x)(2 + \sin x)\ , \qquad (3 - x^2 + 6x)(22 + x^2 - 6x)\ ,$$
$$(1 + x)(2 + x)(3 - 2x)$$

à facteurs positifs (dans les intervalles 0 à π, $3 - 2\sqrt{3}$ à $3 + 2\sqrt{3}$, -1 à $1,5$) et de somme constante, qui passent par un maximum pour

$$x = \frac{\pi}{2}\ , \qquad x = 3\ , \qquad x = \frac{\sqrt{39} - 3}{6}$$

sans que les facteurs soient égaux.

Le théorème A doit être énoncé exactement sous la forme suivante : *Si* n *nombres positifs variables ont somme* (s) *constante, et si en un point de leur champ de variation ils prennent une même valeur* (s : n), *alors en ce point leur produit est maximum,* comme cela résulte de la relation, bien connue,

$$u_1 u_2 \ldots u_n \leqq \left(\frac{u_1 + u_2 + \cdots u_n}{n}\right)^n ,$$

mais il n'est point permis de dire : *si le produit est maximum, les facteurs sont égaux.*

Pour deux facteurs on a : *Si deux nombres positifs variables ont somme constante, alors leur produit est* MAXIMUM *ou* MINIMUM, *selon que la valeur absolue de leur différence est* MINIMUM *ou* MAXIMUM, c'est une conséquence de l'identité

$$4u_1 u_2 = (u_1 + u_2)^2 - (u_1 - u_2)^2 .$$

2. — Soit $f(x)$ une fonction de x et a, b, c, m, n, p des constantes. Voici un procédé élémentaire dont on fait usage (au moins pour $f(x)$ fonction linéaire de x) pour déterminer la valeur de x qui rend maximum le produit

$$y = (a + mf)(b + nf)(c + pf) .$$

Soient α, β des constantes positives telles que

$$(1) \qquad m + n\alpha + p\beta = 0 ;$$

on dit alors, en appliquant le théorème A, que $\alpha\beta y$ est maximum (et y aussi) lorsque

$$(2) \qquad a + mf = \alpha(b + nf) = \beta(c + pf) ;$$

d'après (1) et (2), et pour $b + nf$, $c + pf$ non nuls, on obtient l'équation

$$(3) \quad m(b + nf)(c + pf) + n(c + pf)(a + mf) + p(a + mf)(b + nf) = 0 ,$$

qui détermine l'x qui rend maximum y.

Si $f(x)$ est une fonction linéaire de x, le procédé que nous venons d'indiquer, bien qu'établi sur le théorème faux A, donne un résultat exact, car $\frac{dy}{dx}$ est, quel que soit $f(x)$, le produit de $\frac{df}{dx}$ pour le premier membre de l'égalité (3). Mais en général le procédé est faux, comme le montre, par exemple, le produit

$$y = \sin x (r + \sin x)(r - \sin x)$$

qui devient maximum pour $\sin x = \frac{r}{3}\sqrt{3}$ (application du procédé précédent) si $r \leqq \sqrt{3}$, et pour $\sin x = 1$ si $r > \sqrt{3}$.

Les questions élémentaires de maximum et minimum doivent donc être analysées encore dans leurs fondements.

C. Burali-Forti (Turin).