Le théorème d'Abel, présenté avec soin et appliqué à la démonstration des théorèmes d'addition, engagera le lecteur à pénétrer plus profondément dans le vaste domaine des intégrales abéliennes. L. KOLLROS (Zurich).

O. BOLZA. — **Vorlesungen über Variationsrechnung.** Deutsche Ausgabe. — 1 vol. gr. in-8° de X-705 pages ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce traité et celui de M. Hadamard que j'analyse un peu plus loin constituent certainement une grandiose exposition didactique de résultats longtemps épars, puis rassemblés et développés par Kneser pour former maintenant une branche nouvelle de la Science.

M. Bolza entre immédiatement dans le vif d'explications élémentaires destinées à situer le Calcul des Variations. Il en ramène les problèmes à cinq types différents :

1. Courbe passant par deux points donnés d'un plan et qui, tournant autour d'une droite de ce plan, engendre une surface de révolution d'aire minimum.

2. Même question si la courbe doit avoir une longueur donnée entre les points donnés.

Les problèmes de ce second type sont dits *isopérimétriques*.

3. Problème des lignes géodésiques.

4. Problème de la brachistochrone en milieu résistant.

5. Problème général des surfaces minima passant par un contour donné.

L'ouvrage insiste longtemps sur les problèmes du premier type. Le langage mathématique comporte beaucoup de mots nouveaux. Les maxima ou minima, généralement appelés *extrema* quand la distinction est impossible ou inutile, peuvent se présenter sous des aspects variés suivant l'allure des fonctions ou des intégrales en litige dans le voisinage de ces extrema. Aussi reprend-on avec beaucoup de précision l'ordinaire théorie de la variation des fonctions avant d'aborder la variation première des intégrales, mais ce qui frappe beaucoup, c'est que l'auteur a réussi à mettre ce cachet moderne sur le tableau esquissé par les créateurs sans effacer celui-ci. L'élégante méthode d'Euler et l'équation différentielle qui donne les courbes *extrémales* dans les problèmes du premier type apparaissent de la manière la plus élégante, le tout étant complété par les recherches de M. Darboux nous conduisant à un beau théorème d'après lequel toute équation du second ordre peut être considérée comme définissant les extrémales d'un problème du premier type.

C'est aussi avec la plus grande élégance qu'est étudiée la variation seconde d'où dépend la nature de l'extremum. L'équation différentielle de Legendre est immédiatement mise sous la forme linéaire donnée par Jacobi ; elle possède alors des intégrales particulières en relation très simple avec l'intégrale de l'équation d'Euler. L'enveloppe des extrémales définit géométriquement leurs points conjugués ; les champs d'extrémales avec les fonctions associées de Weierstrass qui satisfont à de certaines équations aux dérivées partielles nous permettent d'arriver aux équations d'Hamilton.

Tout cela ne fait que trois chapitres, terminés d'ailleurs par d'excellents exercices, mais ils constituent déjà un ensemble montrant complètement la prodigieuse portée du Calcul. Le chapitre suivant sur les fonctions de variables réelles, destiné à établir en toute rigueur les théorèmes d'existence, est d'une étude plus laborieuse mais, justement, l'indéniable intérêt des résultats déjà acquis encouragera à son étude.

Ensuite, au lieu de supposer que les extrémales sont des courbes à équation explicite $y = f(x)$, nous nous demanderons ce qu'il advient des résultats acquis si on leur suppose des équations paramétriques. Alors les équations d'Euler, Legendre, Jacobi,... prennent des formes plus symétriques encore et des applications très générales, telles les lignes géodésiques, commenceront à apparaître. Et ces applications pourront être poursuivies, toujours dans le meilleur esprit géométrique, celui d'ailleurs de M. Darboux, dès qu'on pourra passer des extrémales issues de points fixes aux extrémales issues de points mobiles. Là encore la considération des enveloppes de ces extrémales est d'une élégance de tout premier ordre. Demandons-nous maintenant si la continuité analytique des extrémales ne pourrait pas être rompue ? Voilà une question qui, pour certains esprits, pourrait paraître bien peu pratique et comme une recherche oiseuse de la difficulté. La critique cependant serait bien injuste car M. Bolza, après avoir examiné sobrement la question, en applique les résultats à la recherche du projectile de moindre résistance, problème éminemment pratique déjà envisagé par Newton.

A signaler aussi la notion de l'extremum absolu, longtemps admise pour les intégrales qui ne pouvaient franchir une certaine limite, et sur laquelle on fondait à tort des théorèmes d'existence pour les solutions d'équations aux dérivées partielles. Si je signale que le volume étudie enfin le cas des extrémales assujetties à des conditions auxiliaires, cas qui conduit à l'usage du multiplicateur de Lagrange et fait retrouver nombre de résultats de Clebsch, Mayer, etc... concernant les équations aux dérivées partielles, puis que l'auteur tente d'étendre aux intégrales doubles les principaux résultats acquis, j'aurai donné une idée très brève mais encourageante pour l'étude de cet ouvrage écrit d'un bout à l'autre avec harmonie et clarté.

A. Buhl (Toulouse).

H. Bouasse. — **Cours de mécanique rationnelle et expérimentale,** spécialement écrit pour les physiciens et les ingénieurs. — 1 vol. gr. in-8°, 692 p.; 20 fr.; Ch. Delagrave, Paris.

M. Bouasse qui, en écrivant le vaste Cours de Physique dont il a été souvent question ici, se plaignait de la mauvaise forme donnée aux enseignements préliminaires de Mécanique et de Mathématiques, a pris à tâche maintenant de compléter sa grande œuvre en montrant comment les élèves physiciens devraient s'habituer à considérer la Mécanique.

Ce livre, tout d'abord, étonnera les mathématiciens par la facilité avec laquelle l'auteur se sert des méthodes élémentaires pour traiter et réunir des questions qui sont généralement placées dans des chapitres fort éloignés. Ainsi, dans la Géométrie des vecteurs, il n'apparaît pas comme plus difficile de définir le flux d'un vecteur au travers d'une surface que de définir son travail. Et même le fameux théorème de Green (sur l'égalité entre le flux traversant une surface fermée et l'intégrale de la divergence étendue au volume y contenu) s'impose de lui-même dès que l'on voit que ce qui sort de la surface est la somme de ce qui sort de tous les éléments de volume y enfermés. Car les intégrales multiples n'embarrassent pas M. Bouasse; il n'a même pas craint, en commençant par parler des centres et des moments d'inertie, d'en remplir la *troisième* page de son livre au risque d'épouvanter l'étudiant qui a souvent une terreur aussi fantastique qu'injustifiée de ces expressions. Sans doute, il faut s'habituer à n'y voir que des symboles