Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1910)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Neuchâtel; *Université*. — Isely : Calcul infinitésimal, I, 3 : II, 2 ; Calcul des variations, 1 ; Th. des probabilités et des assurances, II, 2. — Gaberel : Th. des fonctions, 2. — Le Grand Roy : Astronomie sphér., 2 ; Géodésie, 1 ; Exerc. d'Astronomie, 1 ; Calcul des orbites, 1.

Zürich; *Universität*. — Zermelo : Diff. u. Integralrechg., 4 ; Diff.-gleichungen, 4 ; Üb. f. Vorger, 2. — Wolfer : Astronomie, 3 ; Üb. dazu., 2 ; Bahnbestimmg. v. Planeten u. Kometen, 2. — Weiler : Darstell. Geomet., I., m. Üb., 4 ; Analyt. Geom. m. Üb., 4 ; Mathem. Geogr., 2 ; Synt. Geom., 3. — Einstein : Elektrizität u. Magnetismus, 4 ; Theor. Phys., 2 ; Physik. Prkt. f. Vorger. tgl. — Gubler : Algebr. Analysis, 2 ; Geom. Unterricht an Mittelschulen, 1. — Adler : Einltg. in d. Physik, 2 ; Geom. Optik, 1. — Du Pasquier : Neuere Entwicklg. d. Zahlenbegriffs, 1 ; Methode d. kleinstein Quadrate, 1 ; Kometenproblem u. verwandte kosmische Fragen, 1.

Zürich; *Ecole polytechnique fédérale. section normale*. — Hirsch : Höh. Mathematik, I, 5 ; Répét. 1, Übgn., 2 ; III, 3 ; Übgn., 1. — Franel : Mathématiques supérieures, I, 5 ; Répét., 1 ; Exerc., 2 ; III, 3 ; Exerc., I. — Geiser : Analyt. Geometrie, 4 ; Üb., 1. — Grossmann : Darst. Geometrie, 4 ; Répét., 1 ; Übgn., 4 ; Geometrie der Lage, 4. — Kollros . Géométrie descr., 4 ; Répét., 1 ; Exerc., 4 ; Géométrie de position, 3 ; Mathem.-Übgn., 2. — Meissner : Mechanik, II, 4 ; Répét., 1 ; Übgn., 2. — Hurwitz : Ellipt. Funktionen, 4. — Hurwitz u. Grossmann : Mathem. Seminar. — Baeschlin : Vermessungskunde, II, 4 ; Répét., 1 ; Erdmessung, 2 ; Geod. Praktikum, 2. — Weber : Zylinderfunktionen u. ihre Verwendung in der Physik, 2. — Du Pasquier : Versicherungs-Mathematik. — Wolfer : Einl. in die Astronomie, 3 ; Übgn., 2 ; Bahnbestimmung von Planeten u. Kometen.

Cours libres. — Beyel : Rechenschieber, 1 ; Darst. Geometrie, 2 ; proj. Geometrie, 1 ; Flächen, 2ten Grades, 2. — Dumas : Applications diverses de mathém. sup., 1. Du Pasquier : Methode der kl. Quadrate u. Ausgleichungsrechn., 1 ; Neuere Entwicklung des Zahlenbegriffs, 1 ; La notion du nombre en mathém. modernes, 1 ; Das Kometenproblem u. verwandte kosmische Fragen, 1. — Keller : Ausgew. Kap. aus der darst. Geometrie, 2. — Kienast : Anw. des Arbeitsbegriffes in der Statik, 1 ; Attraktionstheorie, 1. — Kraft : Analyt. Mechanik, 3 ; Vektoranalysis, 3 ; Geom. Kalkül, III u. V.

BIBLIOGRAPHIE

F. Amodeo. — **Complementi di Analisi Algebrica Elementare** con appendice sulle sezioni coniche. — Parte seconda del volume secondo degli Elementi di Matematica. — 1 vol. in-8°, 312 p., 3 L. ; L. Pierro, Naples.

Par ce dernier volume de ses Eléments de Mathématiques, destinés aux élèves des instituts techniques (gymnases industriels), M. Amodeo rompt avec la tradition. en ce sens qu'il accorde une importance inusitée aux théories de l'analyse algébrique et que, conformément aux vœux émis par de nombreux mathématiciens, il introduit la notion de la dérivée première, donne des exemples de ses multiples applications, sans toutefois établir les règles de dérivation, inutiles pour une première initiation.

Les sept chapitres de ce livre sont autant d'exposés très complets, quoique élémentaires, de l'analyse combinatoire; des fractions continues; de l'analyse indéterminée du premier degré; des inégalités et des systèmes d'inégalités; de la discussion des équations et des problèmes du deuxième degré; des fonctions, de leur discussion et des maxima et minima. Un appendice, consacré à un bref aperçu sur les sections coniques considérées comme les sections d'un cône circulaire droit, termine cet intéressant ouvrage.

W.-M. Baker and A.-A. Bourne. — **Public School Arithmetic.** — 1 vol. in 16, 386 et L p.; relié 3 s. 6 d.; ou avec réponses, 4 s. 6 d.; G. Bell & Sons, Londres.

Ce volume renferme la matière d'un cours complet d'arithmétique et cela presque uniquement sous forme de problèmes et d'exercices, la théorie étant donnée d'une manière claire mais très succinte.

Bien que destiné à des élèves qui possèdent déjà les premières notions d'arithmétique, ce cours débute par un rapide exposé des définitions, notations et méthodes à la base de l'arithmétique. Outre les sujets rentrant d'habitude dans le cadre des cours d'arithmétique, les auteurs n'ont pas craint de faire appel aux notions élémentaires de géométrie, y compris le théorème de Pythagore; ils ont également introduit des éléments d'algèbre toutes les fois que le sujet y gagnait en clarté. L'introduction des logarithmes fait l'objet d'un chapitre. La représentation graphique au moyen de deux axes de coordonnées est expliquée et son utilité mise en lumière par des problèmes de genres très divers.

Le système de poids et mesures en usage en Angleterre occupe naturellement une place prépondérante, cependant le système métrique n'est pas oublié.

Le cours proprement dit est précédé de tableaux des diverses mesures, poids, monnaies, etc., il est suivi de l'énoncé de problèmes proposés aux examens du « civil service ».

Un des principaux mérites de cet ouvrage réside dans un choix judicieux de problèmes, touchant à tous les domaines et conçus de manière à concourir au développement général de l'élève; les maîtres à la recherche de problèmes pratiques et intéressants pourront consulter ce volume avec fruit.

Renée Masson (Genève).

K. Boehm. — **Elliptische Funktionen.** *2ter Teil* : Theorie der ellipt. Integrale. Umkehrproblem. — 1 vol. de 180 p. *(Collection Schubert)*, 5 M.; G. J. Goeschen, Leipzig.

Cette deuxième partie peut être lue indépendamment de la première; elle est consacrée exclusivement à la théorie des intégrales elliptiques et au problème de l'inversion. Les principales propriétés de ces transcendantes sont établies directement par la discussion de l'intégrale elle-même. Suivant la marche historique, l'auteur considère d'abord la valeur de l'intégrale comme fonction de sa limite supérieure; le problème inverse conduit alors aux fonctions doublement périodiques dont les propriétés avaient été démontrées d'une façon toute différente dans le premier volume.

Le théorème d'Abel, présenté avec soin et appliqué à la démonstration des théorèmes d'addition, engagera le lecteur à pénétrer plus profondément dans le vaste domaine des intégrales abéliennes. L. Kollros (Zurich).

O. Bolza. — **Vorlesungen über Variationsrechnung.** Deutsche Ausgabe. — 1 vol. gr. in-8° de X-705 pages; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce traité et celui de M. Hadamard que j'analyse un peu plus loin constituent certainement une grandiose exposition didactique de résultats longtemps épars, puis rassemblés et développés par Kneser pour former maintenant une branche nouvelle de la Science.

M. Bolza entre immédiatement dans le vif d'explications élémentaires destinées à situer le Calcul des Variations. Il en ramène les problèmes à cinq types différents :

1. Courbe passant par deux points donnés d'un plan et qui, tournant autour d'une droite de ce plan, engendre une surface de révolution d'aire minimum.

2. Même question si la courbe doit avoir une longueur donnée entre les points donnés.

Les problèmes de ce second type sont dits *isopérimétriques*.

3. Problème des lignes géodésiques.

4. Problème de la brachistochrone en milieu résistant.

5. Problème général des surfaces minima passant par un contour donné.

L'ouvrage insiste longtemps sur les problèmes du premier type. Le langage mathématique comporte beaucoup de mots nouveaux. Les maxima ou minima, généralement appelés *extrema* quand la distinction est impossible ou inutile, peuvent se présenter sous des aspects variés suivant l'allure des fonctions ou des intégrales en litige dans le voisinage de ces extrema. Aussi reprend-on avec beaucoup de précision l'ordinaire théorie de la variation des fonctions avant d'aborder la variation première des intégrales, mais ce qui frappe beaucoup, c'est que l'auteur a réussi à mettre ce cachet moderne sur le tableau esquissé par les créateurs sans effacer celui-ci. L'élégante méthode d'Euler et l'équation différentielle qui donne les courbes *extrémales* dans les problèmes du premier type apparaissent de la manière la plus élégante, le tout étant complété par les recherches de M. Darboux nous conduisant à un beau théorème d'après lequel toute équation du second ordre peut être considérée comme définissant les extrémales d'un problème du premier type.

C'est aussi avec la plus grande élégance qu'est étudiée la variation seconde d'où dépend la nature de l'extremum. L'équation différentielle de Legendre est immédiatement mise sous la forme linéaire donnée par Jacobi; elle possède alors des intégrales particulières en relation très simple avec l'intégrale de l'équation d'Euler. L'enveloppe des extrémales définit géométriquement leurs points conjugués; les champs d'extrémales avec les fonctions associées de Weierstrass qui satisfont à de certaines équations aux dérivées partielles nous permettent d'arriver aux équations d'Hamilton.

Tout cela ne fait que trois chapitres, terminés d'ailleurs par d'excellents exercices, mais ils constituent déjà un ensemble montrant complètement la prodigieuse portée du Calcul. Le chapitre suivant sur les fonctions de variables réelles, destiné à établir en toute rigueur les théorèmes d'existence, est d'une étude plus laborieuse mais, justement, l'indéniable intérêt des résultats déjà acquis encouragera à son étude.

Ensuite, au lieu de supposer que les extrémales sont des courbes à équation explicite $y = f(x)$, nous nous demanderons ce qu'il advient des résultats acquis si on leur suppose des équations paramétriques. Alors les équations d'Euler, Legendre, Jacobi,... prennent des formes plus symétriques encore et des applications très générales, telles les lignes géodésiques, commenceront à apparaître. Et ces applications pourront être poursuivies, toujours dans le meilleur esprit géométrique, celui d'ailleurs de M. Darboux, dès qu'on pourra passer des extrémales issues de points fixes aux extrémales issues de points mobiles. Là encore la considération des enveloppes de ces extrémales est d'une élégance de tout premier ordre. Demandons-nous maintenant si la continuité analytique des extrémales ne pourrait pas être rompue ? Voilà une question qui, pour certains esprits, pourrait paraître bien peu pratique et comme une recherche oiseuse de la difficulté. La critique cependant serait bien injuste car M. Bolza, après avoir examiné sobrement la question, en applique les résultats à la recherche du projectile de moindre résistance, problème éminemment pratique déjà envisagé par Newton.

A signaler aussi la notion de l'extremum absolu, longtemps admise pour les intégrales qui ne pouvaient franchir une certaine limite, et sur laquelle on fondait à tort des théorèmes d'existence pour les solutions d'équations aux dérivées partielles. Si je signale que le volume étudie enfin le cas des extrémales assujetties à des conditions auxiliaires, cas qui conduit à l'usage du multiplicateur de Lagrange et fait retrouver nombre de résultats de Clebsch, Mayer, etc... concernant les équations aux dérivées partielles, puis que l'auteur tente d'étendre aux intégrales doubles les principaux résultats acquis, j'aurai donné une idée très brève mais encourageante pour l'étude de cet ouvrage écrit d'un bout à l'autre avec harmonie et clarté.

A. Buhl (Toulouse).

H. Bouasse. — **Cours de mécanique rationnelle et expérimentale,** spécialement écrit pour les physiciens et les ingénieurs. — 1 vol. gr. in-8°, 692 p.; 20 fr.; Ch. Delagrave, Paris.

M. Bouasse qui, en écrivant le vaste Cours de Physique dont il a été souvent question ici, se plaignait de la mauvaise forme donnée aux enseignements préliminaires de Mécanique et de Mathématiques, a pris à tâche maintenant de compléter sa grande œuvre en montrant comment les élèves physiciens devraient s'habituer à considérer la Mécanique.

Ce livre, tout d'abord, étonnera les mathématiciens par la facilité avec laquelle l'auteur se sert des méthodes élémentaires pour traiter et réunir des questions qui sont généralement placées dans des chapitres fort éloignés. Ainsi, dans la Géométrie des vecteurs, il n'apparaît pas comme plus difficile de définir le flux d'un vecteur au travers d'une surface que de définir son travail. Et même le fameux théorème de Green (sur l'égalité entre le flux traversant une surface fermée et l'intégrale de la divergence étendue au volume y contenu) s'impose de lui-même dès que l'on voit que ce qui sort de la surface est la somme de ce qui sort de tous les éléments de volume y enfermés. Car les intégrales multiples n'embarrassent pas M. Bouasse; il n'a même pas craint, en commençant par parler des centres et des moments d'inertie, d'en remplir la *troisième* page de son livre au risque d'épouvanter l'étudiant qui a souvent une terreur aussi fantastique qu'injustifiée de ces expressions. Sans doute, il faut s'habituer à n'y voir que des symboles dont le calcul, dans les cas les plus généraux, pourrait être compliqué mais n'est cependant guère à redouter en pratique. A ce dernier point de vue il est bien rare que la symétrie ne réduise pas une intégrale double ou triple à une seule quadrature. Et c'est d'ailleurs ce que nous observons immédiatement dans les différents cas où sont calculés des centres ou des moments d'inertie.

Tout au début de ce livre, nous sommes familiarisés non pas seulement avec le vecteur ou avec leurs combinaisons en petit nombre, mais avec les champs de vecteurs et, pour illustrer l'idée de flux, M. Bouasse parle brièvement de la dilatation. A l'idée de travail se rattache l'idée particulière de fonction potentielle, puis de fonction harmonique, ce qui nous conduit à bref délai aux fonctions de Bessel et aux polynômes de Legendre qui seront, dans la suite, des instruments précieux. J'insiste peut-être trop sur ces débuts, qui ne forment pas la dixième partie du volume, mais je tiens à marquer que, comme dans les volumes du Cours de Physique, ils représentent, réduit au mininimum, tout l'effort analytique à donner. Je ne vois rien plus loin qui soit d'une difficulté plus grande.

En Cinématique, les principes sont immédiatement illustrés par les exemples les plus variés, par la description de nombreux mécanismes ; il en est de même en Statique où nous trouvons la balance, la suspension bifilaire, les polygones et courbes funiculaires, etc. Conformément aux besoins de la pratique, il s'agit surtout de systèmes pesants où nous voyons nettement que les positions d'équilibre correspondent aux positions les plus hautes ou les plus basses du centre d'inertie. Signalons aussi les cas intéressants d'équilibre indifférent où le centre d'inertie se meut horizontalement. Dans l'équilibre dû au frottement, nous étudions l'échelle, le valet de menuisier, les tableaux suspendus au mur, le coin, le traîneau, la vis, les tourillons, les freins, les cordes frottant sur des barres autour desquelles on les enroule. Enfin, après quelques généralités sur l'attraction, nous passons à la figure de la Terre ; je signalerai à ce sujet un paragraphe fort intéressant sur la variation de g avec la hauteur, variation décelée à l'aide d'une balance assez sensible pour indiquer la présence de quelques tonnes de plomb amenées sous le dispositif.

Mais l'intérêt devient à peu près impossible à dépasser quand M. Bouasse aborde la Dynamique. Il s'occupe tout de suite des difficultés qui, dans les théorèmes fondamentaux, n'ont pas toujours été discutées de manière à dissiper toute obscurité. Voici le théorème des aires avec le fameux problème du chat, illustré d'ailleurs par beaucoup de mécanismes qui tournent effectivement dans l'espace par le seul jeu de forces intérieures et voici le théorème des forces vives pour des points assujettis à des liaisons dépendant du temps, cas où toutes difficultés sont écartées par application judicieuse du principe de d'Alembert.

A propos du mouvement d'un point sur une courbe, voici le raccordement des voies : il est facile de voir que le problème comporte un certain degré d'arbitraire qu'on peut lever au moyen de trois hypothèses principales en admettant que la courbure est proportionnelle à l'abscisse, à la corde, ou à l'arc de la courbe à tracer. Dans le premier cas, la courbe dépend d'une intégrale elliptique ; dans le second cas, on trouve une lemniscate de Bernoulli; dans le troisième cas, une clothoïde, courbe dépendant des fameuses intégrales de Fresnel qui se rencontrent en optique et sont aussi bien connues des mathématiciens. A propos des attractions proportionnelles à la distance, le mouvement harmonique et ses combinaisons donnent immédiatement les mouvements vibratoires ; pour deux de ces mouvements combinés orthogonalement, nous avons les courbes de Lissajoux : les attractions, en raison inverse du carré de la distance conduisent aux mouvements planétaires poussés jusqu'à une idée sommaire du calcul des perturbations.

Les corps tournant autour d'un axe fixe nous font faire connaissance avec les volants et les régulateurs ; le pendule circulaire (ou composé) compensé ou non, le métronome, le pendule réversible de Kater, qui illustre une symétrie remarquable du pendule circulaire, nous conduisent à la mesure des moments d'inertie ; le parallélisme avec l'aimant oscillant dans un champ uniforme entraîne des manipulations de même nature pour les corps pesants et les aimants.

Voici enfin des mouvements oscillatoires un peu plus quelconques, le pendule dont le point de suspension se déplace ou dont le fil varie en longueur, ce dernier nous offrant une application remarquablement simple des fonctions de Bessel. Au sujet des corps à axe fixe qui subissent des percussions, M. Bouasse montre soigneusement l'influence de la nature de ces corps et trouve d'excellentes réflexions dans le maniement d'un simple marteau. Le pendule conique le conduit à la théorie des sismographes.

Les questions de résonance, peu développées dans les traités de Mécanique, sont d'abord prises dans les cas simples où l'équation du mouvement est linéaire avec second membre périodique ordinaire ou périodique amorti. Elle sont illustrées par de nombreux appareils. Viennent ensuite les équations générales des petits mouvements d'après Lagrange appliquées aux pendules superposés et aux pendules sympathiques d'Huyghens. Les calculs dans la recherche des oscillations principales sont poussés jusqu'au bout avec le désir évident de percevoir nettement ce qui peut être perçu dans ces phénomènes complexes quand les amplitudes des oscillations sont suffisamment petites.

M. Bouasse termine par le mouvement d'un solide autour d'un point fixe puis par celui d'un solide plus libre, toupie ou gyroscope par exemple, en mettant encore très soigneusement en évidence les circonstances paradoxales qui se présentent dans les questions de stabilisation. Il nous montre les nombreux appareils qui se renversent quand de nouvelles liaisons viennent empêcher les moindres mouvements de nutation.

J'ai toujours le regret de me trouver bien bref en parlant de choses si intéressantes.

D'ailleurs de nombreuses manipulations forment un chapitre terminal qui est comme une revision pratique du cours. On ne saurait trop dire, les services que celui-ci peut rendre aux mathématiciens et aux mécaniciens trop théoriques ; mais il est utile aussi au plus haut point vis-à-vis de l'étude de tous les cours de physique en désencombrant ceux-ci des raisonnements, des méthodes et des appareils qui ne relèvent que de la simple mécanique. Telle est d'ailleurs l'attitude que prend M. Bouasse vis-à-vis de son propre cours, auquel le volume qui vient de paraître forme une introduction des plus heureuses.

A. Buhl (Toulouse).

G. Combebiac. — **Les actions à distance.** *(Collection Scientia).* — 1 vol. in-8° ; 2 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Depuis le moment où Newton découvre les lois de la gravitation, de nombreuses tentatives d'explication en ont été essayées. Les explications électrodynamiques semblent présenter actuellement le plus d'avenir. Les explications mécaniques, soit statiques, soit dynamiques ont complètement échoué. Dans les dernières, en particulier, le phénomène de gravitation est toujours accompagné de phénomènes irréversibles très considérables. Il n'en est plus de même pour les explications hydrodynamiques de Bjerkness et de Riemann ; bien que ces explications ne soient que des analogies, elles présentent un intérêt évident au point de vue mathématique. La plupart de ces recherches hydrodynamiques ont été publiées à l'étranger. On ne saurait donc trop remercier M. Combebiac, de s'être distrait un instant des recherches spéciales qu'il poursuit sur ces questions, pour présenter au lecteur français dans ce petit volume « le bilan des résultats obtenus dans l'étude des actions exercées par les fluides en mouvement, en les établissant par les moyens les plus directs ».

Après avoir, au chapitre I, donné quelques notations et formules générales empruntées à la théorie des quaternions, l'auteur établit rapidement au chapitre II l'expression de l'action exercée sur un corps immergé dans un fluide en mouvement irrotationnel, telle qu'elle résulte des équations générales de l'hydrodynamique. Le chapitre III rappelle quelques propriétés des sphériques harmoniques, qui seront utilisées dans les divers problèmes aux limites traités plus loin. Le chapitre IV étudie les actions dues aux sphères pulsantes et oscillantes de Bjerkness. L'auteur y établit que des sphères ou des corpuscules qui pulsent en accord dans un fluide incompressible s'attirent en première approximation en raison inverse du carré de la distance et que des sphères oscillantes en accord exercent entre elles des actions analogues à celles qu'on observe entre aimants élémentaires. Le chapitre V est consacré à l'étude des actions des sphères faiblement compressibles et à la théorie de la gravitation donnée par Korn. Les chapitres VI et VII sont relatifs à l'action d'un fluide en mouvement sur des anneaux infiniment déliés et aux remarquables analogies hydro-électriques suggérées par les formules obtenues. Le chapitre VIII : Propos sur l'électricité, indique quelques analogies nouvelles se présentant lorsqu'on considère des fluides légèrement déformables et des mouvements rotationnels. Le chapitre IX et dernier : Les explications mécaniques en physique, bien que présentant quelques vues personnelles intéressantes de l'auteur, me semble sortir un peu du cadre du livre.

L'emploi des symboles de la théorie des quaternions, à laquelle une courte note est consacrée à la fin du volume, a permis de réduire au minimum l'appareil de formules et de donner à la rédaction une forme très concise et très représentative. Quelques fautes typographiques dans les formules ont échappé à la correction (principalement au commencement du chapitre II). Je regrette l'absence d'une bibliographie complète des questions traitées.

M. Plancherel (Genève).

P. Duhem. — **Thermodynamique et Chimie.** — 1 vol. gr. in-8°, XII, 579 p. avec 173 fig.; 16 fr. (18 fr. relié) ; A. Hermann & fils, Paris.

Il y a huit ans, la librairie A. Hermann avait publié, de P. Duhem, un ouvrage intitulé : *Thermodynamique et Chimie, leçons élémentaires ;* cet ouvrage étant épuisé, une seconde édition vient d'être mise en vente par la même librairie.

En cette seconde édition, le plan général de l'ouvrage est demeuré le même qu'en la première : l'auteur expose, tout d'abord, les principes généraux de la Thermodynamique et montre comment on tire de ces principes les fondements d'une Mécanique chimique ; puis il présente chacun des principaux chapitres de cette Mécanique chimique. Il a soin de faire un appel aussi rare que possible aux formules mathématiques, même les plus simples, et de donner, en revanche, un très grand nombre d'exemples fournis par l'expérience.

Mais si le plan de l'ouvrage n'a pas changé, les matières que ce plan sert à ordonner ont été grandement accrues ; plus de 70 articles nouveaux sont venus s'adjoindre à ceux que contenait la première édition.

Ces additions nombreuses ont eu pour objet de tenir compte des plus récentes acquisitions de la Chimie physique ; à cet égard, l'auteur n'a rien négligé pour tenir son livre au courant même des recherches qui ont paru au cours de l'impression ; telle note, publiée en janvier 1910, s'y trouve analysée.

Mais plusieurs développements nouveaux ont eu surtout pour but de présenter d'une manière plus complète certaines questions que les nouveaux programmes ont introduites dans l'enseignement secondaire ; tels sont, par exemple, les articles consacrés à la dégradation de l'énergie.

Nous tenons à rappeler pour terminer que c'est M. Duhem qui a publié en France le premier ouvrage sur la Mécanique chimique. C'est en 1886 lorsqu'il était encore élève à l'Ecole normale qu'il fit paraître : *Le Potentiel thermodynamique et ses applications à la Mécanique chimique et à l'étude des phénomènes électriques.* Dans cet Ouvrage aujourd'hui fort rare malgré ses deux éditions, il faisait connaître les travaux si remarquables de Gibbs, alors complètement inconnu en France. Depuis il a publié sur la Mécanique chimique un grand nombre d'ouvrages et de mémoires C'est donc le fruit de 25 ans de travaux ininterrompus qu'il expose aujourd'hui dans cette nouvelle édition.

J. Hadamard. — **Leçons sur le Calcul des Variations.** *Tome premier :* La variation première et les conditions du premier ordre ; les conditions de l'extremum libre. — 1 vol. gr. in-8°, 520 p., 18 fr. ; Hermann & fils, Paris.

Comme je l'ai dit un peu plus haut, en analysant le livre de M. Bolza dont la traduction allemande n'a précédé la publication de celui-ci que de fort peu, nous sommes maintenant en présence de grands ouvrages sur une branche des Mathématiques qu'illustra Weierstrass en des mémoires malheureusement difficiles à lire et que Kneser bâtit provisoirement de manière didactique en un livre qui peut être considéré comme le germe des puissantes publications de l'heure présente. A proprement parler, M. Hadamard ne cherche ni à refaire l'œuvre de Kneser, ni à se superposer à celle de Bolza. Les élégants et innombrables problèmes rattachés à l'Analyse classique le tentent moins que ceux qui peuvent naître d'un examen attentif et prévoyant des bases du sujet en litige. A cet égard, il ouvre devant nous des horizons indéfinis. Que l'on pense, par exemple, aux développements déjà prodigieux nés de certains problèmes tels que celui des lignes géodésiques ou celui des surfaces minima ; il n'en est pas moins vrai que ce sont des problèmes particuliers pour le Calcul des Variations. Or, si ce calcul lui-même a pour objet de rechercher les extrema *d'intégrales* dépendant de fonctions arbitraires, pourquoi parler seulement d'intégrales ? N'y a-t-il pas d'autres expressions fonctionnelles que les intégrales dont on peut étudier les modifications dans le *champ fonctionnel ?* Ainsi le Calcul des Variations ne sera que la première marche pour entrer dans le temple, à architecture encore indécise, du Calcul fonctionnel. Que ne faut-il pas conclure de l'avenir et de la puissance de celui-ci si des problèmes célèbres y disparaissent en prenant des dimensions minuscules.

M. Hadamard, dans ce beau livre, arrive à rassembler rapidement des résultats illustres souvent considérés de manières disparates. Dans l'un de ses premiers chapitres il rattache immédiatement la variation de l'action hamiltonienne aux équations de la Dynamique et observe que cette transformation bien connue peut être répétée pour des variations premières beaucoup plus générales. Il met alors les équations du Calcul des Variations sous la forme canonique et, comme cette dernière est la source de tous les admirables résultats de la Dynamique moderne et particulièrement de la Mécanique Céleste, il nous montre que le Calcul des Variations peut profiter de ceux-ci.

Au sujet des problèmes isopérimétriques (exemples immédiats d'extrema liés), M. Hadamard semble ne pas autant tenir que M. Bolza à placer dans le Calcul des cloisons qui ne sauraient être étanches, mais serviraient cependant à la classification des problèmes. Il a pris les choses d'une manière tellement générale qu'il domine tout; il s'efforce ici de préciser les conditions où justement on pourra raisonner sur l'extremum lié comme sur l'extremum libre; il prendra pour s'expliquer les élégantes propriétés des géodésiques, puis des fils pesants glissants sur des surfaces. Sous le titre de *problème de Mayer,* il généralise le problème de Lagrange, se heurte à des cas d'extrema liés où l'on croit ne plus pouvoir mettre les équations des extrémales sous forme canonique mais y arrive tout de même par l'usage de certaines transformations de contact.

Nous pouvons maintenant passer dans le Calcul fonctionnel général. Il n'y a pas, encore une fois, que les intégrales dont on cherche les extrema qui dépendent de fonctions arbitraires. Ainsi les problèmes de la Physique mathématique conduisent à chercher des fonctions qui, de par les conditions aux limites, dépendent de fonctions arbitraires : ce sont des *fonctionnelles* de celles-ci. Les fonctionnelles *continues* sont celles qui ne se modifient qu'infiniment peu quand on ne modifie qu'infiniment peu les fonctions dont elles dépendent; on pressent alors, avec M. Volterra, les notions de *dérivée* ou de *différentielle fonctionnelles.* Seulement, pour que subsiste le parallélisme avec le Calcul infinitésimal ordinaire, il faut que la variation fonctionnelle dépende *linéairement* de variation de fonctions, tout comme une différentielle totale dépend linéairement des différentielles des variables. De là l'importante notion de *fonctionnelle linéaire.* M. Hadamard illustre ces définitions en revenant sur les fonctions de Green, de Neumann, etc..... ainsi que sur les problèmes déjà étudiés dans ses *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique.*

Quant aux conditions qui permettent de choisir parmi les extrémales pour assurer définitivement les extrema, conditions dont l'obtention exige l'examen de la variation seconde, nous retrouvons un ordre à peu près analogue à celui décrit plus haut à propos de l'ouvrage de M. Bolza; les noms et les théories de Legendre, Jacobi, Weierstrass, Darboux, etc. ne pouvaient pas ne pas revenir. Weierstrass surtout semble apporter l'extrême rigueur et M. Darboux, par des voies différentes et en étudiant surtout les géodésiques, apporte parallèlement l'élégance. D'ailleurs l'esprit analytique de M. Hadamard ne s'est pas refusé aux schèmes géométriques qui montrent intuitivement de curieuses difficultés et d'intéressants paradoxes. Si j'ajoute que les notions d'équations aux variations et d'invariants intégraux qui jouent un rôle si considérable dans les travaux de M. Poincaré sont aussi rattachées au Calcul ici présenté, j'aurai donné de l'œuvre une idée qui, quoique fort incomplète, montre assez le rôle capital qu'elle est appelée à jouer dans la Science. A. BUHL (Toulouse).

K. HENSEL. — **Theorie der algebraischen Zahlen,** Band I. — 1 vol. in-8° de XI-349 pages, 14 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

L'attention des plus grands géomètres de toutes les époques a toujours été retenue par les belles propriétés des nombres, mais ce n'est qu'avec Gauss qu'a commencé l'exploration pour ainsi dire systématique des lois auxquelles ils sont assujettis. Les recherches de Gauss lui-même sur les résidus biquadratiques furent la suite naturelle des mémorables *Disquisitiones arithmeticae,* comme plus tard aussi celles de Kummer relatives aux équations de la division du cercle. La théorie des résidus biquadratiques ne prit une forme satisfaisante que lorsque Gauss eut fait entrer dans le champ de ses considérations les quantités rationnelles complexes de la forme $a + bi$, tandis que Kummer ne put étendre aux corps de nombres dont il s'occupait la proposition fondamentale de l'arithmétique élémentaire qui dit que tout nombre entier n'est décomposable que d'une seule façon en un produit de facteurs premiers, que par l'introduction de ses nombres idéaux.

Dedekind, Kronecker puis Hensel ont ensuite donné des méthodes permettant d'étendre à un corps algébrique quelconque toutes les merveilleuses lois mises en évidence par Gauss dans ses *Disquisitiones.* Leurs recherches, tout à fait indépendantes, ont conduit, ainsi que cela devait être, aux mêmes résultats. Considérées les unes à côté des autres, elles s'expliquent mutuellement et à cause de la différence de leur point de départ jettent un jour fort net sur la nature du nombre en général. Ceci s'applique entre autres aux conceptions fondamentales de Dedekind et de Hensel. Les idéaux du premier ont leur raison d'être dans les diviseurs du second, diviseurs dont ils sont cependant, et en une certaine mesure, la réalisation concrète.

Le livre dont nous donnons ici l'analyse est le fruit de dix-huit années de travail. Les méthodes qu'on y rencontre s'appuient sur une généralisation hardie du concept de nombre. A côté des nombres rationnels ordinaires et des nombres algébriques proprement dits, M. Hensel introduit de nouveaux éléments, constitués par des suites *indéfinies,* le plus souvent divergentes :

$$(1) \qquad A = \sum_{\nu=\rho}^{\nu=\infty} e_\nu p^\nu \qquad \text{et (2)} \qquad B = \sum_{\nu=\rho}^{\nu=\infty} \varepsilon_\nu \pi^\nu .$$

Le terme « *Nombre-à-base*-p » les caractérisent entièrement[1].

Dans les A, qui seront appelés « Nombres-à-base-p rationnels » les coefficients e_ν sont des nombres rationnels quelconques. Ces e_ν sont astreints à la seule condition d'être entiers par rapport à p, c'est-à-dire d'être des nombres dont le dénominateur, dans l'expression réduite, n'est pas divisible

[1] Voir la note bibliographique consacrée par M. HADAMARD au livre dont il s'agit ici. *Revue générale des Sciences,* Année 1909, p. 961. Le terme « *Nombre-à-base*-p » (Nombre écrit avec une majuscule) est la traduction par M. Hadamard de celui de « p-*adische Zahl* » adopté par M. Hensel.

par le nombre p qui, par hypothèse, est un nombre premier. Les exposants ν sont des entiers, dont le premier ρ peut d'ailleurs être négatif.

Les quantités

$$A_k = e_\rho p^\rho + e_{\rho+1} p^{\rho+1} + \dots + e_{k-1} p^{k-1}, \qquad (k = \rho, \rho + 1, \dots)$$

seront, par définition, les *valeurs approchées* de A, dans le domaine de p.

Deux Nombres-à-base-p, A et A', sont *égaux dans le domaine de* p, lorsque leurs valeurs approchées A_k et A'_k, pour des k suffisamment grands sont toujours congrues entre elles pour des modules égaux à des puissances de p aussi élevées qu'on veut.

Ajoutant à ces définitions celles qui correspondent aux opérations fondamentales de l'arithmétique (addition, soustraction, multiplication et division), on en conclut ensuite que les Nombres-à-base-p rationnels constituent dans leur totalité un corps $K(p)$ [1].

Un Nombre-à-base-p rationnel est d'*ordre* k, si ses valeurs approchées sont toutes exactement divisibles, par rapport à p, par p^k; autrement dit, si ces valeurs sont successivement égales à p^k multiplié par une fraction, qui, sous forme réduite, n'a ni son numérateur ni son dénominateur divisible par p. Cet ordre sera, en général, égal à l'exposant de la première puissance de p entrant dans l'expression du Nombre-à-base-p, car, de tous les développements qui peuvent correspondre à un même Nombre-à-base-p, celui qu'on rencontre le plus souvent se présente sous forme *réduite*, c'est-à-dire avec coefficients égaux à 0, 1, 2... ou p — 1.

Les éléments B peuvent s'appeler « Nombres-à-base-p algébriques ». Ils se rattachent par leur définition à une équation déterminée

$$(3) \qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

à coefficients rationnels entiers, irréductible dans le domaine de p, c'est-à-dire avec premier membre indécomposable en un produit de polynômes dont les coefficients appartiendraient au corps $K(p)$.

Soit α l'une des racines de (3) et π l'un des nombres d'ordre minimum par rapport à p, du corps algébrique (au sens classique) se rattachant à α. On a $\pi^e = p\beta$, où β représente un nombre algébrique entier par rapport à p, non divisible algébriquement par p, et e un nombre entier. π est, dans le corps considéré, diviseur premier de p. Les ε_ν désignent en outre toute quantité de ce même corps, entière par rapport à p.

Si l'on considère alors la totalité des éléments B de (2) où les ε_ν et π ont la signification qui vient de leur être donnée, on voit que ces éléments constituent à leur tour un nouveau corps que M. Hensel désigne par $K(p, \alpha)$.

π est en général égal à p. Il n'en diffère que lorsque p est un diviseur du discriminant de l'équation (3).

Les définitions de l'égalité de deux Nombres-à-base-p algébriques, et celle de l'ordre par rapport à π, sont en tous points semblables à celles qui ont été rappelées touchant les Nombres-à-base-p rationnels.

---

[1] Voir à ce propos : HENSEL, *Ueber die zu einer algebraischen Gleichung gehörigen Auflösungskörper* (*Journal de Crelle*, t. 137, p. 183 à 210). — STEINITZ, *Algebraische Theorie der Körper* (*Ibid.*, t. 138, p. 167 à 310). — Ces deux récents travaux mettent en lumière un grand nombre de points importants. Beaucoup de détails de la présente analyse sont empruntés au premier d'entre eux.

$K(p)$ et $K(p, \alpha)$ jouissent des propriétés communes à tous les corps. Il en résulte que la plupart des propositions de l'arithmétique et de l'algèbre élémentaires s'y transportent simplement. On verrait, en particulier, qu'un produit de Nombres-à-base-p appartenant à $K(p)$ ou à $K(p, \alpha)$ ne peut être nul que s'il en est de même de l'un de ses facteurs [1]; que tout polynôme, dont les coefficients sont des Nombres-à-base-p, n'est décomposable que d'une seule façon en un produit de polynômes de même nature ; etc.

Ces préliminaires établis, passons à ce qui sert de base à toute la théorie.

Soit $K(\omega)$ le corps algébrique (au sens classique) qu'on se propose d'étudier et

$$F(x) = 0 \tag{4}$$

l'équation de degré n, à coefficients rationnels, irréductible (au sens classique), par lequel il est défini.

p représentant alors un nombre premier, il existe toujours, en correspondance avec (4) et défini par une équation de même nature que (3), un corps $K(p, \delta)$ de Nombres-à-base-p algébriques tel que le premier membre de (4) soit, dans ce corps, décomposable d'une manière unique en un produit

$$F(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2)\,.\,.\,(x - \xi_n) \qquad (p) \tag{5}$$

de facteurs du premier degré [2].

Cette dernière égalité n'a d'ailleurs, au point de vue analytique ordinaire, qu'un sens tout à fait formel et signifie, qu'effectuant les opérations symbolisées par son second membre où les ξ_i sont des Nombres-à-base-p algébriques du corps $K(p, \delta)$, on tomberait sur un polynôme en x dont les coefficients seraient, au sens donné plus haut pour l'égalité de deux Nombres-à-base-p, égaux à ceux de $F(x)$.

La relation (5) établit, en outre, entre les racines de (4) et les ξ_i, une correspondance uniforme dont on fera usage dans toutes les questions où peut intervenir la divisibilité par p des éléments du corps $K(\omega)$.

La puissance exacte de p, entrant comme diviseur dans le discriminant du nombre ω s'obtiendrait, par exemple, en remplaçant, dans le déterminant qui le représente, ω et toutes ses valeurs conjuguées par leurs expressions en fonction des ξ_i. Ce déterminant, tous calculs faits, deviendrait égal à un Nombre-à-base-p rationnel d'où l'on déduirait de suite la puissance cherchée.

Les systèmes fondamentaux dans $K(\omega)$ s'obtiennent rapidement aussi par des procédés analogues.

Ces opérations sont légitimes par le fait que toute relation rationnelle à coefficients rationnels reliant entre eux un nombre quelconque d'éléments

---

[1] Cette proposition n'est vraie pour les éléments de $K(p)$ que parce que p est un nombre premier. Elle n'est vraie aussi pour ceux de $K(p, \alpha)$ que parce que l'équation à laquelle se rattache ce corps est, par hypothèse, irréductible dans le domaine de p. Un élément de $K(p)$ ou de $K(p, \alpha)$ est nul lorsque tous ses coefficients e_ν ou ε_ν sont tous divisibles par p.

[2] Toute équation admet une infinité de pareils « *corps de réduction* » $K(p, \delta)$; mais les résultats auxquels on est conduit par l'adoption de l'un ou de l'autre restent identiques. Voir le mémoire cité de M. Hensel.

du corps $K(\omega)$ se trouve encore vérifiée, dans le domaine de p, lorsqu'on y remplace ces éléments par les suites qui leur correspondent et qui se déduisent des ξ_i.

Tout se passe d'ailleurs de la même façon que s'il s'agissait de fonctions algébriques se rattachant à une équation $F(y, x) = 0$. Ces différentes fonctions sont développables dans le voisinage d'un point quelconque, $x = a$, en séries ordonnées suivant les puissances croissantes, entières ou fractionnaires, de $x - a$.

Mais l'analogie se poursuit plus loin encore. Le premier membre de (4) peut être irréductible, ou décomposable, d'une seule façon, en un produit de facteurs irréductibles dans le domaine de p.

On aura, par exemple, les $f_i(x)$ représentant des polynômes dont les coefficients seront des Nombres-à-base-p rationnels,

$$F(x) = f_1(x) f_2(x) \dots f_\lambda(x) \qquad (p) \tag{6}$$

de sorte qu'on voit que les ξ_i, ou ce qui revient au même, que les racines (au sens classique) de $F(x)$ se répartissent en *cycles* dans le domaine de p. Ce résultat fondamental s'obtient par comparaison des seconds membres de (5) et (6), qui, formellement et tous calculs faits, sont évidemment identiques.

A chaque cycle d'une fonction algébrique y correspond, comme on sait, un point P de la surface de Riemann relative à y. On peut dire aussi que ce point P, qui se rapporte d'ailleurs à une valeur déterminée, $x = a$ de x, symbolise l'un des facteurs, irréductible dans le voisinage de $x = a$, du polynôme $F(y, x)$ qui donne naissance à la fonction y.

Si la fonction algébrique $z = \varphi(x, y)$ est au point P d'ordre déterminé k, cela peut s'exprimer en disant que z est en ce point divisible exactement par P^k. Cette notion, dont M. Hensel a tiré le plus grand parti dans ses nombreux mémoires et dans son grand traité sur les fonctions algébriques, intervient de nouveau ici dans la définition des *diviseurs premiers algébriques*. Ceux-ci sont des symboles $\mathfrak{p}$ que M. Hensel fait correspondre à tous les diviseurs irréductibles de $F(x)$ dans les domaines respectifs de tous les nombres rationnels p.

Ces diviseurs premiers se rattachent ainsi respectivement à chaque cycle de racines de $F(x) = 0$. Ils sont indépendants de la quantité primitive du corps considéré. Les premiers membres des équations que vérifient ces quantités sont, en effet, décomposables de la même façon que $F(x)$ en facteurs irréductibles dans le domaine de chaque nombre premier p.

Une quantité β du corps $K(\omega)$ sera, d'autre part, divisible par $\mathfrak{p}^k$, si, dans le cycle qui correspond à $\mathfrak{p}$, β se trouve, par rapport à la puissance fractionnaire de p dont ce dernier dépend d'un ordre égal à k. Ceci se justifie, en remarquant qu'à chaque diviseur $f_i(x)$ de $F(x)$ correspond par l'intermédiaire d'une équation analogue à l'équation (3), un corps bien déterminé de Nombres-à-base-p algébriques. L'exposant k, toujours entier, de $\mathfrak{p}$ est l'ordre par rapport à π du Nombre-à-base-p algébrique qui correspond dans ce corps à β.

De la notion de diviseur premier, on passe à celle de *diviseur* en général. On nomme ainsi un produit de puissances de diviseurs premiers. A cette définition vient s'ajouter celle du nombre algébrique multiple d'un diviseur donné, notion immédiate, d'après ce qui précède, et qui conduit à celle d'*idéal*.

Les multiples d'un diviseur donné constituent dans le corps considéré un idéal et à chaque idéal se rattache ainsi un diviseur de Hensel, plus grand commun diviseur en quelque sorte de tous les éléments de l'idéal. Le théorème fondamental de l'arithmétique élémentaire prend, enfin, chez M. Hensel, la forme suivante : « *Tout nombre algébrique entier est égal (ou équivalent) au produit, d'ailleurs unique et bien déterminé, de ses diviseurs premiers.* »

Telle sont, sans qu'il soit possible d'entrer dans le moindre détail, dans leurs grandes lignes et en traits généraux, les notions essentielles qu'on rencontre dans l'important volume de M. Hensel. Les principes de ce dernier seront peut-être un jour applicables à toutes les catégories de nombres. Ce but cependant ne semble pas encore atteint. Dans certaines pages consacrées à l'examen de développement convergents et qui sont aursi ordonnés suivant les puissances croissantes de p, on se rend compte des difficultés qu'il y a à faire correspondre à un nombre défini autrement que par une relation algébrique, un Nombre-à-base-p unique et bien déterminé.

M. Hensel, heureusement, poursuit ses profondes recherches. Un second volume, dont on ne peut que se réjouir d'avance, doit paraître bientôt.

Gustave Dumas (Zurich).

A. Höfler. — **Didaktik des mathematischen Unterrichts** (Band I der *Didaktischen Lehrbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen*, herausgegeben von A. Höfler u. E. Poske). — 1 vol. gr. in-8°, 509 p., avec 2 planches et 147 figures ; B. G. Teubner, Leipzig.

Les efforts qui se font depuis quelques années pour perfectionner les méthodes de l'enseignement scientifique devaient nécessairement donner lieu à des monographies spéciales, conformes aux tendances actuelles. C'est cet ensemble d'études didactiques que viennent d'entreprendre MM. Höfler et Poske sous le titre indiqué ci-dessus ; elles embrasseront toutes les branches scientifiques de l'enseignement secondaire supérieur et comprendront dix volumes, en vente séparément.

Le premier volume est consacré aux mathématiques. Entièrement nouveau par la forme et le fond de l'exposé, l'Ouvrage de M. Höfler ne fait pas double emploi avec les exposés systématiques de Reidt et de Simon. Il se propose d'insister tout particulièrement sur les idées fondamentales qui forment la base de la réforme actuelle de l'enseignement mathématique. Il s'agit souvent de transformations qui ont reçu une solution favorable dans bon nombre d'écoles, sur l'initiative des maîtres, ou qui sont déjà introduites dans certains programmes officiels, mais que l'on voudrait cependant voir adoptées d'une façon générale dans tout l'enseignement secondaire supérieur. Telle est par exemple la question de l'introduction de la notation de fonction et du calcul infinitésimal, dont on parle tant ces dernières années.

M. Höfler a été bien inspiré en ne traitant pas séparément l'Arithmétique et la Géométrie. Il examine le but, les plans d'études et les méthodes, adaptés à l'âge de l'élève, successivement pour chaque degré de l'enseignement.

Nous ne saurions trop recommander aux jeunes maîtres l'étude de cet Ouvrage, sur lequel nous aurons sans doute souvent à revenir dans cette Revue.

H. F.

F.-W. LANCHESTER. — **Aerodynamik.** Ein Gesamtwerk über das Fliegen. Aus dem Englischen übersetzt von C. u. A. RUNGE. Band I. — 1 vol. relié in-8°, 360 p. ; 12 Mk. ; B.-G. Teubner, Leipzig.

Les questions d'aérodynamique sont d'une grande actualité aujourd'hui. Des recherches théoriques et pratiques se poursuivent de tous les côtés. Le présent livre offre donc un intérêt tout particulier et vient répondre à un réel besoin. L'auteur a réuni dans ce premier volume les notions fondamentales concernant les bases hydrodynamiques du problème du vol. Par ses recherches à la fois théoriques et expérimentales, il était bien qualifié pour faire un exposé destiné non seulement aux physiciens et aux ingénieurs, mais aussi à tous ceux qui, s'intéressant à ce problème, ne possèdent qu'une faible préparation en mathématiques et en physique.

La rédaction allemande a été faite avec beaucoup de soin par M. Runge, professeur à l'Université de Gœttingue.

Max MANDL. — **Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen** (IV.—VII. Klasse). — 1 vol. in-8°, 382 p., 305 fig.; broché 4 Kr., relié, Kr. 4,50 ; Manzsche k. u. k. Buchhandlung, Vienne.

On sait que de nouveaux plans d'étude ont été adoptés dernièrement en Autriche pour l'enseignement secondaire supérieur. Ce manuel, qui s'adresse aux élèves des classes supérieures des écoles réales, a été conçu conformément aux idées nouvelles ; il ne traite pas seulement la géométrie proprement dite, mais également la trigonométrie plane et sphérique et la géométrie analytique.

L'ouvrage comprend six parties : 1. Planimétrie. — 2. Stéréométrie. — 3. Trigonométrie plane. — 4. Trigonométrie sphérique. — 5. Géométrie analytique (On y trouvera également un complément comprenant entre autres les sections coniques). — 6. Introduction des éléments du calcul infinitésimal.

L'auteur s'est inspiré des tendances modernes, il laisse de côté toute matière inutile ; en stéréométrie, par exemple, il aborde immédiatement les corps proprement dits sans passer par tous les théorèmes concernant le plan et la droite. Il cherche avant tout à développer l'intuition géométrique et s'attache également au côté pratique. On notera à cet égard l'application de la trigonométrie sphérique à la cosmographie.

La notion de fonction est introduite dès le début et se développe peu à peu, à chaque occasion, dans tout le cours de l'ouvrage jusqu'à l'étude de la variation d'une fonction à l'aide du coefficient différentiel.

Signalons encore les nombreuses remarques historiques dont l'ouvrage est parsemé (sur π, la quadrature du cercle, la division de la circonférence en n parties égales, etc.). Elles contribueront certainement à éveiller l'intérêt des élèves.

Cet ouvrage se recommande également par la clarté des figures et la disposition favorable du texte. J.-P. DUMUR (Genève).

E. PENDLEBURY. — **Exercises and examination papers in arithmetic, logarithms and mensuration.** 7me édition, revue et augmentée. — 1 vol. in-16, 212 p., relié 2 s. 6 d.; G. Bell and Sons, Londres.

M. Pendlebury a réuni dans ce recueil des problèmes et exercices dont la plupart ont été proposés dans différents examens : examens d'entrée pour l'armée et examens organisés par les universités d'Oxford, de Cambridge et de Londres.

Un chapitre est consacré à des exercices et problèmes sur les mesures de surface et de volume et à des calculs logarithmiques. Le volume se termine par les réponses aux problèmes proposés.

L'ouvrage de M. Pendlebury en est à la 7me édition qui a subi des modifications considérables soit dans l'ordre suivi, soit en ce qui concerne les problèmes eux-mêmes et constitue ainsi presque un nouveau recueil. Cet ouvrage sera utile pour la préparation des examens.

H. Poincaré. — **Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik.** — 1 brochure gr. in-8° de 60 p. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ces conférences, faites à l'Université de Göttingen par M. Poincaré, ont été rédigées par des étudiants qui ont ainsi trouvé le moyen de rendre hommage à un grand maître et d'être utile à ceux qui ne pouvaient l'écouter.

Elles ont trait à des travaux qui ont déjà eu des échos dans différents périodiques y compris d'ailleurs l'*Enseignement mathématique*.

La première conférence *Ueber die Fredholmschen Gleichungen* a trait à des travaux brièvement traités par M. Poincaré dans les *Comptes Rendus*. Il y est question des noyaux réitérés et des méthodes qui rattachent à l'équation de Fredholm les développements dont la série de Fourier est le type le plus simple. Dans son *Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf die Flutbewegung des Meeres*, il revient sur l'application des méthodes de Fredholm à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du problème des marées. D'ailleurs à la page 293 de son récent ouvrage sur la Théorie des Marées (*Ens. math.* T. XII, 1910, p. 256), M. Poincaré renvoie à la conférence en question. De même, dans son *Anwendung der Integralgleichungen auf Hertzsche Wellen*, nous sommes en relation avec un très important Mémoire *Sur la diffraction des ondes hertziennes* (*Rendiconti di Palermo*. T. 29, p. 169).

La conférence *Ueber die Reduktion der Abelschen Integrale und die Theorie der Fuchsschen Funktionen* nous reporte dans un sujet où M. Poincaré est revenu à diverses reprises durant toute sa carrière ; on sait qu'il jeta les bases de la théorie des fonctions fuchsiennes dans un Mémoire inséré au tome I des *Acta Mathematica*.

Ueber transfinite Zahlen nous rappelle les discussions logiques auxquelles furent mêlées récemment les noms de Russell, Zermelo, etc...

Enfin dans *La Mécanique nouvelle*, conférence faite en français, l'auteur examine la mécanique des grandes vitesses, la non invariabilité de la masse et l'origine électromagnétique de celle-ci. Le tout sous la forme philosophique analogue d'ailleurs à celle employée par M. Poincaré le 3 août 1909 au Congrès de Lille. On trouvera un résumé à ce sujet dans l'*Enseignement mathématique* de cette époque. Il est probable que M. Poincaré ne songeait pas à rédiger ces conférences : l'offre qui lui en a été faite par ses auditeurs allemands prouve assez la valeur qu'ils y ont attribué.

A. Buhl (Toulouse).

K. Schwarzschild. — **Ueber das System der Fixsterne.** Aus populären Vorträgen. — 1 fasc. in-8°, 44 p. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Dans cet opuscule le directeur de l'observatoire de Potsdam donne un aperçu rapide des récents progrès réalisés dans les recherches astronomiques. Les conférences de M. Schwarzschild ont beaucoup contribué au développement de l'astronomie populaire et cela dans un sens très heureux, contrairement à l'influence de tant d'autres astronomes populaires du temps présent. Il domine complètement le sujet et par cela même il peut, mieux que de simples imitateurs, rendre populaires, tout en les exposant scientifiquement, des sujets souvent très difficiles. Des aperçus de ce genre sont un excellent contrepoids à d'autres écrits, qui semblent pousser comme de la mauvaise herbe, et qui contiennent souvent une profusion d'illustrations sans être réellement instructifs. S. Mauderli (Soleure).

R. Suppantschitsch. — **Leitfaden der darstellenden Geometrie** für die V. und VI. Klasse der Realgymnasien. — 1 vol. in-8°, 196 pages, 212 fig., 204 problèmes, cart., 3 kr.; F. Tempsky, Vienne, 1910.

Ces *Eléments de géométrie descriptive* font partie du Cours de mathématiques que M. Suppantschitsch destine aux lycées autrichiens. On retrouve dans ce manuel, il est presque superflu de le dire, toutes les remarquables qualités d'exposition que nous avons signalées en donnant un aperçu des premiers volumes.

L'étude des projections et développements du parallèlipipède rectangle et de la pyramide quadrangulaire forme l'objet de l'introduction et du premier chapitre; les projections normales du point et du segment rectiligne sur une ligne droite précèdent également l'étude des diverses positions d'un point par rapport aux plans de projections; c'est là un fait intéressant conforme aux idées pédagogiques nouvelles.

Le deuxième chapitre (p. 16 à 52) est consacré aux droites, aux projections sur un plan de profil, aux rotations des droites. Dans le troisième (pages 52 à 62), intitulé *Projections obliques*, l'auteur introduit les coordonnées dans l'espace et en donne quelques applications simples à la représentation des cristaux.

Ce n'est que dans le chapitre suivant : *Solution de problèmes de stéréométrie au moyen du dessin*, que nous trouvons l'étude du plan donné par ses traces; la théorie des ombres d'une pyramide, d'un triangle sur un plan quelconque, d'une droite sur une autre droite, — et un « tableau-résumé » des problèmes fondamentaux de la stéréométrie terminent la première partie.

Le deuxième livre est aussi divisé en quatre chapitres.

Le chapitre V (p. 98 à 129) a pour titre : *Polygones, prismes et pyramides;* il se remarque par l'application continuelle de l'affinité.

Dans le chapitre VI (p. 129 à 179) *Cylindres et cônes de révolution, sphère, projections d'un cercle*, l'auteur s'étend assez longuement sur les sections coniques; il détermine, entre autres, les points d'intersection d'une droite et d'une section conique; comme application figure la recherche des ombres du cylindre et du cône.

Le chapitre VII (p. 179 à 186) traite de *la Sphère*, sections planes et ombres; enfin les principales notions relatives aux *Surfaces de révolution* sont exposées sommairement dans le VIII^me^ et dernier chapitre.

La lecture de cet intéressant manuel doit être recommandée à toutes les personnes qui enseignent la géométrie descriptive.

Aug. Lalive (La Chaux-de-Fonds).