

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 12 (1910)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Rubrik:** MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

### Sur le principe d'induction complète.

Au moment où j'ai écrit la Note insérée dans le numéro de novembre 1909 de l'*Enseignement*, j'ignorais que la question avait déjà été résolue par M. Zermelo de la façon la plus heureuse dans les *Acta mathematica* (Tome XXXII, fasc. 2, p. 185).

M. Zermelo ne prend pas, il est vrai, le principe de l'induction complète comme élément de définition pour le type ordinal  $\omega$ ; mais il rapporte ce principe à une propriété exactement équivalente des ensembles ordonnés de ce type, savoir celle de constituer des « chaînes simples », c'est-à-dire de ne pouvoir être divisés en parties « séparées », deux parties étant dites séparées lorsqu'aucun des éléments de l'une n'a son image (l'élément qui le suit immédiatement) dans l'autre et réciproquement.

Cette notion d'enchaînement et celle d'induction complète se rapportent uniquement aux ensembles ordonnés ayant un premier élément et dans lesquels à tout élément en correspond un autre qui le suit immédiatement. Si un tel ensemble  $M$  est divisé en parties séparées, chacune de celles-ci contient les images de tous ses éléments, puisque ces images ne peuvent, d'après la définition même des parties séparées, appartenir à d'autres parties. Celle de ces parties  $M_0$  qui contient l'élément initial devrait donc, si  $M$  satisfaisait au principe d'induction complète, être identique à  $M$ , qui ne pourrait donc pas être divisé en parties séparées.

M. Zermelo donne de la réciproque la démonstration suivante :

Les parties  $M_1$  de  $M$  qui contiennent l'élément initial  $e$  et l'image de chacun de leurs éléments ont une partie commune  $M_0$  qui possède les propriétés suivantes : 1°  $M_0$  figure parmi les ensembles  $M_1$ ; car il contient  $e$  et les images de tous ses éléments, puisque tout élément  $a$  de  $M_0$  appartient à tous les  $M_1$  et, par suite, il en est de même de son image  $a'$ , qui appartient donc bien à la partie commune  $M_0$ ; 2° à l'exception de  $e$ , tout élément de  $M_0$  est l'image d'un élément de cet ensemble; sans cela, en supprimant un élément en  $M_0$  on obtiendrait un ensemble  $M_1$ , ce qui est contraire à la définition de  $M_0$ .

Si  $M_0$  ne se confond pas avec  $M$ , soit  $R = M - M_0$  l'ensemble complémentaire. Il résulte des propriétés de  $M_0$  qu'aucun élément

de  $M_0$  ne peut être l'image d'un élément de  $R$  et réciproquement, c'est-à-dire que les parties  $M_0$  et  $R$  sont séparées. Par conséquent, lorsque  $M$  ne peut être divisé en parties séparées,  $M_0$  se confond avec  $M$  et il en est par suite de même de tout ensemble  $M_1$ , c'est-à-dire que le principe d'induction complète est satisfait.

On peut encore donner une autre forme au principe d'induction complète. Si l'on appelle « segment » d'un ensemble ordonné un sous-ensemble contenant tous les éléments qui précèdent ses éléments, on reconnaît facilement que, pour un ensemble ordonné  $M$  ayant un premier élément et dans lequel tout élément a un suivant immédiat, un segment est un sous-ensemble qui contient l'élément initial et les suivants de tous ses éléments à l'exception du dernier s'il en existe un. Dès lors il est clair que l'induction complète équivaut à la propriété suivante : *tout segment de  $M$  qui n'est pas identique à l'ensemble total a un dernier élément.*

Il reste à démontrer que l'ensemble des nombres entiers finis ordonné suivant les grandeurs est du type ordinal  $\omega$ . C'est ce que fait M. Zermelo en définissant ces nombres comme puissances ou nombres cardinaux des ensembles finis, ceux-ci étant eux-mêmes définis par la propriété de pouvoir être « doublement bien ordonnés » ; un ensemble ordonné est dit doublement bien ordonné si tout sous-ensemble a à la fois un premier et un dernier élément. Les types de ces ensembles sont évidemment les segments du type  $\omega$ .

La question du principe de l'induction complète se trouve bien ainsi définitivement résolue, et cela dans la voie qu'indiquait déjà le bon sens.

G. COMBEBIAC (Limoges).