Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1910)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CONSTRUCTIONS DE PLANIMÉTRIE SOLUTIONS NOUVELLES DE PROBLÈMES COMPLIQUÉS PAR DES CONDITIONS PARTICULIÈRES

Autor: Redl, Franz

Kapitel: I. — Construire la bissectrice d'un angle dont on ne peut atteindre le sommet (fig. 1).

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12785

On trouvera une certaine cohésion logique qui ne se rencontre pas par hasard.

Nous espérons montrer qu'en Géométrie il ne s'agit pas de mémorisation formaliste, mais que toute construction donne à l'élève l'occasion de faire travailler son talent inventif; et ce n'est qu'ainsi que le savoir se transforme en activité, développe l'esprit.

Nous voudrions montrer à l'élève que les mathématiques ne sont pas un instrument de martyr (comme l'affirment ses détracteurs), mais, qu'au contraire, par le développement naturel et la combinaison des propriétés des figures, elles sont une source de vie attrayante et féconde. L'enseignement doit montrer aux élèves que le monde est aux audacieux.

1. — Construire la bissectrice d'un angle dont on ne peut atteindre le sommet (fig. 1).

a) Choisissons, sur les côtés l_1 et l_2 qui déterminent l'angle A, 2 segments égaux PQ′ et P′Q, puis menons d'une part les parallèles à PQ par P′ et Q′; d'autre part les parallèles à P′Q′ par P et Q.

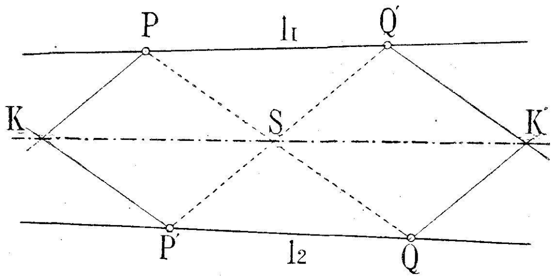

Fig. 1.

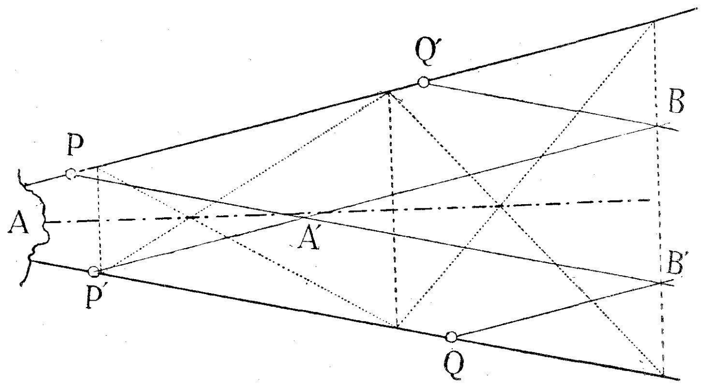

Fig. 2.

Les intersections de ces 2 paires de parallèles donnent 2 points K et K′ de la bissectrice cherchée. En effet, si nous désignons par T l'intersection de P′K avec l_1, nous voyons que

$$P'Q : TP = AP' : AT ,$$

et puisque $P'Q = PQ'$

$$PQ' : TP = AP' : AT .$$

Mais :

$$PQ' : TP = KP' : TK ,$$

donc

$$AP' : AT = KP' : TK ,$$

ce qui montre que K appartient à la bissectrice cherchée, on montrerait de même que K′ s'y trouve aussi.

Si l_1 et l_2 sont très voisins et faiblement convergents, il est préférable d'effectuer une translation d'un des côtés, puis d'appliquer la construction. En élevant ensuite 4 perpendiculaires à la bissectrice ainsi construite on obtient facilement celle que l'on cherche.

Remarque : KK′ est l'axe perspectif des ponctuelles semblables déterminées par les segments homologues PQ et P′Q′ ; et peut être construit comme tel. (Utilisé dans la fig. 4.)

Problème inverse. — Connaissant la bissectrice d'un angle, reporter sur les côtés deux segments égaux à partir de deux points donnés, dans le même sens, ou en sens inverse ; en construisant des parallèles seulement.

Soit par exemple à reporter PQ′ à partir de Q dans le sens du sommet.

Il suffit de mener par Q′ une parallèle à PQ jusqu'à son intersection K′ avec la bissectrice, puis une nouvelle parallèle à K′Q par Q′ ; cette dernière coupera le côté AQ au point cherché P′.

Si l'on se proposait de reporter PQ′ en sens inverse sur P′Q on utiliserait le point K comme nous venons d'utiliser K′ ; — les points P et P′ joueraient alors le même rôle que Q′ et Q.

b) Une construction connue, mais difficilement applicable dans le cas de petits angles, consiste à mener à l'intérieur de l'angle une parallèle quelconque à chaque côté, la bissectrice de leur angle partage la diagonale du parallélogramme en 2 segments qu'on intervertit. Par le point ainsi obtenu on mène une parallèle à la bissectrice auxiliaire, ce sera la bissectrice cherchée.

On peut modifier cette construction :

Mener à chaque côté une paire de parallèles qui interceptent sur les côtés des segments égaux PQ′ et P′Q. On obtient ainsi un losange A′A″BB′ dont une diagonale BB′ est perpendiculaire à la bissectrice cherchée, tandis que l'autre A′A″ lui est parallèle (fig. 2).

Au lieu d'intervertir les segments déterminés sur PP′ et QQ′, on peut mener 2 parallèles à BB′ et déterminer 2 points de la bissectrice comme le montre la fig. 2.

Pour rendre ce deuxième procédé applicable aux petits angles, nous déterminerons A′A″ comme suit : par rapport au milieu de PP′, le point S dans la fig. 1 est symétrique de K et dans la fig. 2 A′ est symétrique de A.

Si dans la fig. 2 nous dessinions le point S d'intersection de PQ et de P′Q′ ainsi que le point K de la bissectrice (fig. 1) nous aurions SA′ $=$ et $\|$ KA et ces 2 segments sont équidistants du milieu de PP′ ; d'où nous déduisons facilement que SA′ est bissectrice des angles PA′P′ et QA″Q′. (Le point A″ n'est plus visible dans la figure.)

Dans la fig. 3 désignons le point S par S_1 ; — pour les mêmes raisons que S_1, les points S_2 et S_3 appartiennent à la bissectrice des angles $PA'P'$ respectivement $RA''R'$.

La droite $A'A''$ est ainsi déterminée d'une nouvelle manière.

Nous avons démontré du même coup que la droite de Pascal de l'hexagone $PR'QP'RQ'$; — dans le cas où $PQ = PR = P'Q' = P'R'$; — est parallèle à la bissectrice de l'angle A. La ligne de Pascal partage les diagonales PP'; QQ' et RR' dans le même rapport que cette bissectrice; — les segments devant toutefois être intervertis.

La figure 3 donne un exemple de faisceaux perspectifs dont les sommets P et P' coïncident avec les points d'intersection du rayon commun et des supports AP et AP' des ponctuelles égales déterminées par les segments homologues $PQ = P'Q'$.

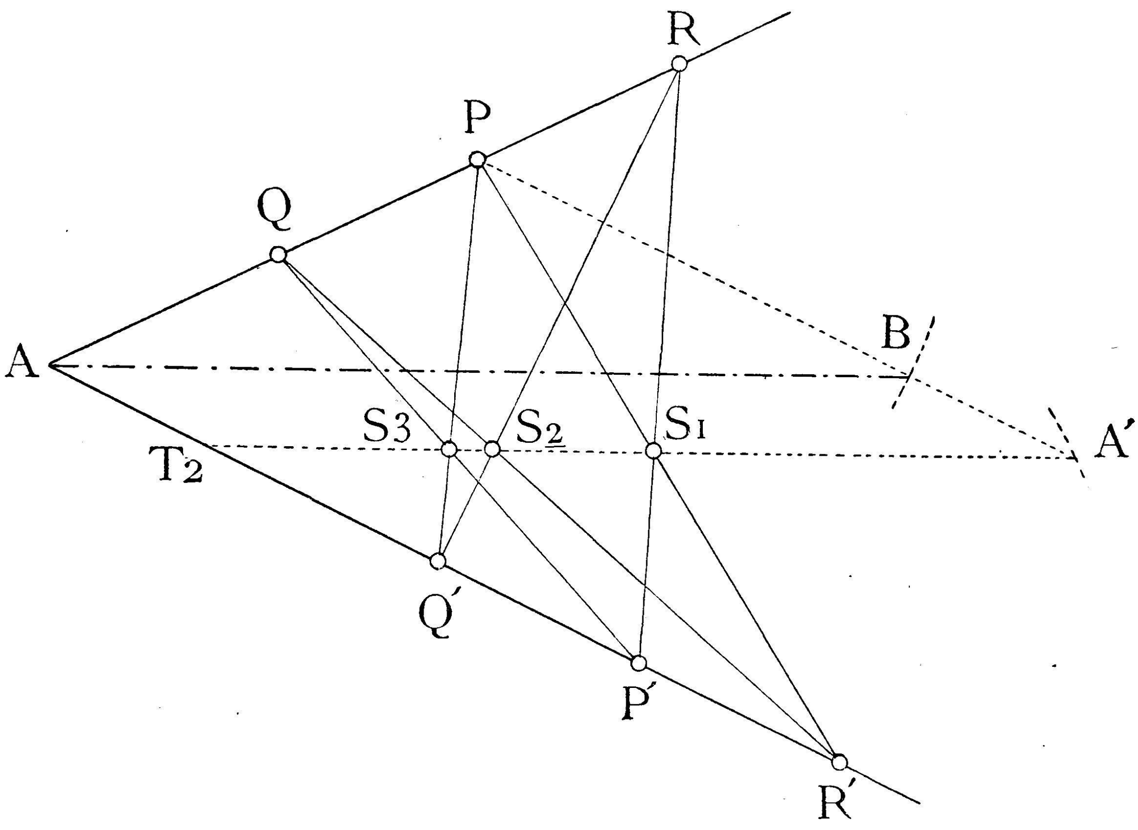

Fig. 3.

La détermination de la bissectrice, dans le cas de petits angles, sera plus exacte si on a soin de transporter les segments égaux PR et $P'R'$ sur les côtés, à des distances égales et suffisamment grandes pour que S_1 et S_3 soient assez écartés.

L'emploi déjà mentionné de perpendiculaires à l'axe perspectif conduit à la bissectrice cherchée.

On pourrait éviter l'emploi de ces perpendiculaires en ne construisant pas les ponctuelles égales sur les côtés eux-mêmes, mais sur des parallèles à ces côtés, choisies de telle sorte qu'elles se coupent dans la figure; — par exemple dans la fig. 2 sur PB' et $P'B$. L'axe perspectif de ces ponctuelles donne immédiatement la bissectrice de l'angle PAP'.

Les points d'intersection des côtés donnés et des parallèles auxiliaires étant des points homologues, cette simplification sera peu favorable dans le cas de petits angles.

Désignons l'intersection de l'axe perspectif $S_1S_2S_3$ avec PP' par T_1, avec AP' par T_2 et avec AP par T_3, en appliquant le théorème de Carnot à la transversale $T_1T_2T_3$ du triangle APP', nous aurons :

$$\frac{AT_3}{PT_3} \cdot \frac{PT_1}{P'T_1} \cdot \frac{P'T_2}{AT_2} = +1$$

d'où

$$\frac{PT_3}{P'T_2} = \frac{AT_3}{AT_2} \cdot \frac{PT_1}{P'T_1} = \frac{AP'}{AP} = \frac{PT_3}{P'A - (PT_3 - PA)} = \frac{PA + (P'A - P'T_2)}{P'T_2} ,$$

ce qui montre que

$$\overline{PT_3} = \overline{P'A} \; ; \quad \overline{P'T_2} = \overline{PA}$$

$$\overline{RT_3} = \overline{R'A} \; ; \quad \overline{R'T_2} = \overline{RA}$$

$$\overline{QT_3} = \overline{Q'A} \; ; \quad \overline{Q'T_2} = \overline{QA}$$

Que nous pouvons exprimer :

Théorème : *La distance d'un point quelconque de l'une des ponctuelles au sommet de l'angle A est égale à la distance du point homologue de l'autre ponctuelle au point d'intersection de cette seconde ponctuelle avec l'axe perspectif.*

Cette proposition se justifie très simplement au point de vue projectif : on voit que les points des deux ponctuelles confondus en A sont les homologues de T_2 et T_3. Les segments homologues $\overline{PA}$ et $\overline{P'T_2}$ seront donc égaux à cause de l'égalité des ponctuelles.

Les points à l'infini des deux ponctuelles étant homologues, PX'_∞ et $P'X_\infty$ se coupent en un point A' de l'axe perspectif, donc

$$\overline{PT_3} = \overline{P'A} = \overline{A'P} \; .$$

La réciproque est également vraie.

Si le point T_2 est situé dans les limites de la figure, on peut facilement déterminer A' à l'aide du compas ; puisque $\overline{P'A'} = \overline{AP} = \overline{T_2P'}$, il suffira de couper l'axe perspectif par un cercle de rayon $P'T_2$ et de centre P'. Puisque $\overline{AP}$ est aussi égal à $\overline{BP}$, le point B se trouvera à l'intersection de PA' et du cercle de rayon $P'T_2$ et de centre P.

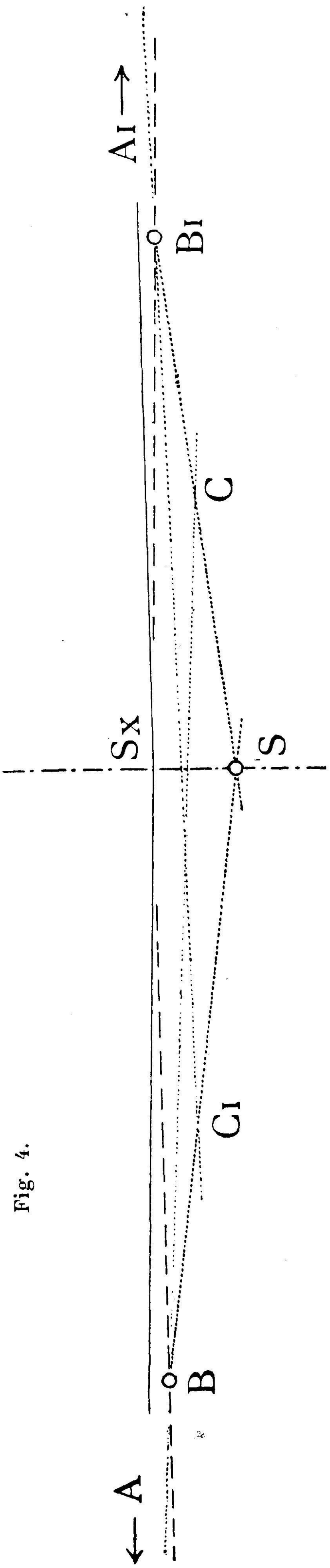

Fig. 4.

En menant par B la parallèle à l'axe perspectif, on obtient la bissectrice de l'angle A.

Si dans la fig. 3 on mène par P une parallèle à RP′ et par P′ une parallèle à PQ′, elles se coupent en un point K_1 de la bissectrice extérieure de l'angle PAP′.

Le point d'intersection Σ de RP′ et de PQ′ appartient à la bissectrice extérieure de l'angle PA′P′, car $AK_1 =$ et $\parallel A'\Sigma$.

Les segments AK_1 et $A'\Sigma$ sont équidistants du milieu de PP′.

$A'\Sigma$ est l'axe perspectif des ponctuelles égales déterminées sur les côtés AP et AP′ par les segments $PR = P'Q'$.

La bissectrice extérieure de PAP′ est l'axe perspectif des ponctuelles semblables caractérisées par RP′ et Q′P.

Si $A'\Sigma$ coupe AP au point Δ_3 et AP′ en Δ_2 on aura, comme plus haut :

$$\overline{AP'} = \overline{PT_3} = \overline{PA'} = \overline{P\Delta_3}$$

et

$$\overline{AP} = \overline{P'T_2} = \overline{P'A'} = \overline{P'\Delta_2}$$

Nous ne nous occuperons pas des constructions qui résulteraient de ces relations, car elles ne nous conduiraient à rien de nouveau.

II. — Construire la bissectrice d'angles très obtus. Déterminer le sommet de très petits angles.

La détermination exacte de la bissectrice d'un angle très obtus présente des difficultés spéciales parce que le sommet en est mal déterminé. Il est impossible d'éviter absolument les causes d'erreurs. On peut y tendre en employant des règles très soigneusement vérifiées pour prolonger le plus possible les côtés — toutes les constructions devront être effectuées en traits très fins.