**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 12 (1910)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** QUEL NOMBRE CONVIENDRAIT LE MIEUX COMME BASE DU SYSTÈME DE NUMÉRATION ?

**Autor:** Du Pasquier, L. Gustave

**Kapitel:** VI. — Point de vue évolutionniste.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-12784

Résumons les considérations qu'impose la pratique : si l'on se place exclusivement au point de vue de la difficulté à surmonter pour apprendre à calculer, pour acquérir et maintenir la routine du calcul, le système décimal doit être absolument condamné et remplacé aussi tôt que possible par le système à base 4 (ce dernier a en outre l'avantage de pouvoir être pratiqué à côté du système décimal). Vis-à-vis du système quaternaire, le système décimal se présente comme étant la seule cause de cet enseignement si pénible et si difficile qui tourmente la jeunesse scolaire et continuera, hélas, à tourmenter les enfants de bien des générations encore, et pourtant il n'aboutit à d'autre résultat qu'à une pratique suffisante de l'addition et de la soustraction, tandis que la multiplication et la division s'oublient plus ou moins, faute de l'exercice constant que le système décimal exige à un beaucoup plus haut degré que les systèmes à base plus petite. M. T. N. Thiele exprime ses réflexions en écrivant : « Le système décimal forme un triste contraste avec ce principe démocratique que les institutions sociales doivent favoriser également tout le monde, non pas seulement de petites minorités ».

Faut-il donc croire, en revanche, que le système décimal favorise effectivement « l'aristocratie des calculateurs ? » Nous éluciderons cette question en nous plaçant à un sixième et dernier point de vue.

## VI. — **Point de vue évolutionniste.**

Pour « l'homme moyen », le système décimal est à rejeter absolument; nous pensons l'avoir démontré ci-dessus. Mais qu'en est-il pour les grands calculateurs ? Le petit nombre de ceux qui sont doués des facultés relativement grandes qu'exige le système décimal acquièrent-ils dans le calcul une habileté telle qu'ils ne pourraient calculer aussi bien, et encore mieux, dans d'autres systèmes ?

**a).** — Tous les bons calculateurs veulent une base aussi grande que possible, pour la raison que nous avons déjà indiquée plus haut (voir II, *b*). Là, nous avons montré comment le nombre des signes nécessaires pour représenter un nombre diminue quand la base augmente ; nous devons ajouter maintenant, qu'en même temps diminue aussi le nombre des « opérations partielles » dont tout calcul se compose. En effet, *toute opération sur de grands nombres se compose d'opérations partielles ou intermédiaires.* Prenons comme exemple deux nombres à six chiffres, tels que $a = 213465$, $c = 926543$. Pour former la somme $a + c$, on additionnera d'abord les unités simples $5 + 3$, puis les dizaines $6 + 4$, puis les centaines $4 + 5$, etc., c'est-à-dire qu'il y aura au moins six opérations partielles à effectuer. — De même, pour former la différence $a - c$. — Pour trouver le produit $a \,.\, c$, il faut multiplier le multiplicande $a$ d'abord par 3, puis par 4, puis par 5, etc., enfin par 9, donc séparément par chacun des chiffres du multiplicateur $c$, ce qui exige au moins 36 opérations partielles, ensuite additionner ces six produits, ce qui demande de nouveau 27 opérations au moins. La formation du produit de deux nombres à six chiffres exige donc, au minimum, 63 opérations intermédiaires. Or, en diminuant le nombre des chiffres, on diminue le nombre des opérations partielles. C'est dire qu'on augmente non seulement *la rapidité* des calculs, mais aussi leur *degré de confiance*, puisqu'on diminue les chances d'erreurs.

Cherchons à évaluer cet avantage en nombres précis. Pour les additions et les soustractions, le rapport du nombre des opérations partielles est à peu près le même que celui du nombre des chiffres, donc, comme nous l'avons prouvé plus haut (voir II, *b*), inversement proportionnel au logarithme des bases. — Pour les multiplications et les divisions, le rapport en question devient plus favorable aux grandes bases ; on peut approximativement l'égaler au carré du rapport précédent ; en d'autres termes : lorsqu'il s'agit de multiplication ou de division, le nombre des opérations intermédiaires croît en raison inverse du carré du logarithme de la base. — Appliquons cette évaluation aux systèmes décimal et quaternaire. L'avantage du premier sur le deuxième est exprimé pour les additions par le rapport $\log 10 : \log 4 \sim 5 : 3$, pour les multiplications par le rapport $(\log 10)^2 : (\log 4)^2$, presque équivalent à $3 : 1$.

Autrement dit : en employant le système décimal plutôt que le système quaternaire, on gagne en rapidité de calcul à peu près $66\,{}^2/_3\,{}^0/_0$ sur les additions et presque $200\,{}^0/_0$ sur les multiplications. Cet avantage prononcé des grandes bases est contrebalancé par un fait que nous avons également fait ressortir (voir V, *b*), c'est que même le calculateur le plus habile ne pourrait opérer aussi vite ni aussi sûrement avec les grands chiffres qu'avec les petits ; mais cette différence en faveur des petites bases ne compense certainement pas l'autre, et tous les bons calculateurs seront d'accord pour préférer une grande base à une petite. Le système à base 16 par exemple, en comparaison de notre système décimal, ferait gagner en rapidité de calcul $20\,{}^0/_0$ sur les additions et $44\,{}^0/_0$ sur les multiplications, puisque le rapport $\log 16 : \log 10$ est à peu près égal au rapport $6 : 5$.

Nous avons donc deux partis adverses dans le monde des gens qui ont à calculer : d'un côté une petite minorité, nous l'appelions tout à l'heure « l'aristocratie des calculateurs » ; ce sont ceux qui sont doués d'une grande facilité de calcul ; ils voudraient tous remplacer la base 10 par une plus grande, ils désirent en vérité une base aussi grande que possible. — D'un autre côté une immense majorité, nous pourrions l'appeler « la démocratie des calculateurs » ; c'est la grande masse de ceux dont les facultés ne se portent pas vers le calcul numérique ; ceux-là voudraient tous remplacer la base 10 par une plus petite, eux désirent une base aussi petite que possible. — Aristocrates et démocrates peuvent faire valoir de très bonnes raisons ; et comme une base doit être fixée, la même pour tout le monde, il pourrait sembler au premier abord que démocrates et aristocrates (dans ce domaine comme dans d'autres) défendront chacun sa cause si bien que ce qui existe, c'est-à-dire le système décimal, continuera à exister indéfiniment.

**b).** — En examinant de près comment procède « l'aristocratie des calculateurs », on arrive cependant à un tout autre résultat : on voit qu'il y a moyen de contenter les deux partis ! On constate d'abord qu'il y a une énorme différence entre les membres de cette aristocratie-là, et qu'avec beaucoup d'exercice, il est possible de faire des progrès surprenants. On constate ensuite que les grands calculateurs opèrent toujours en réunissant les chiffres deux par deux, ou trois par trois, si possible même quatre par quatre ; les bons calculateurs arrivent à opérer avec les nombres de deux chiffres aussi couramment et avec la même habileté qu'un calculateur « moyen » avec les nombres d'un seul chiffre. En d'autres termes : les bons calculateurs ne se contentent pas du système décimal, mais opèrent dans le système centésimal ou millésimal, ils s'efforcent d'atteindre les plus hauts degrés de l'échelle $10, 10^2, 10^3, 10^4, \ldots$

C'est du reste ce que font tous ceux qui emploient les grandes tables publiées par Crelle, lesquelles contiennent les produits deux par deux de tous les nombres entiers jusqu'à 1000 fois 1000. En reprenant notre exemple de ci-dessus : 213 465 . 926 543, et posant, pour abréger et en même temps généraliser : $(a) = 213$, $(b) = 465$, $(c) = 926$, $(d) = 543$, au lieu d'avoir à multiplier deux nombres de six chiffres, c'est comme si l'on n'avait affaire qu'à deux nombres de deux chiffres :

$$\begin{array}{rrr} & (a) & (b) \\ & (c) & (d) \\ \hline & & \times \\ & \times & \\ & \times & \\ \times & & \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

(Chaque point représente un chiffre, et chaque croix un résultat à trouver dans la table, donc un nombre de 6 ou 7 chiffres, dans notre exemple particulier.) Au lieu d'un minimum de 63 opérations intermédiaires, on n'en a plus que 14 à effectuer, et même seulement 7, si, en additionnant les résultats partiels, on prend également les chiffres 3 par 3. Bien qu'on perde beaucoup de temps à feuilleter le gros volume des tables, l'avantage est encore considérable ; sans cette perte de temps, il aurait pour expression approchée $(\log 1000)^2 : (\log 10)^2 = 9 : 1$. Un grand nombre de calculateurs font ainsi, grâce à ces tables étendues, en quelque sorte un usage journalier du système à base 1000.

« L'aristocratie des calculateurs » sait donc fort bien se procurer les grandes bases dont elle a besoin, mais elle est gênée par les difficultés de l'exécution. Additionner de tête des nombres de 2 chiffres, ce n'est pas bien difficile, mais peu nombreux sont ceux qui peuvent multiplier de tête et sans hésitation un nombre de 2 chiffres par un chiffre, à plus forte raison par un autre nombre de 2 chiffres. Il n'est pas donné à chacun d'étendre son « petit livret » jusqu'à 100 fois 100. Les grands calculateurs sont aussi mécontents du système décimal et ne le défendront pas ; mais ils ne se plaignent point de ce que la base 10 soit trop grande en elle-même, ils se plaignent plutôt de ce qu'il faille monter si haut pour atteindre les degrés suivants de l'échelle, de ce que 10 soit trop grand pour que ses puissances puissent être d'un usage commode comme bases d'un système numéral.

Ainsi, tous les calculateurs, grands et petits, bons et mauvais, sont mécontents du système décimal, mais pour des raisons différentes. Or, il y a un moyen de les contenter tous en satisfaisant à ces diverses exigences ; et ce moyen consiste dans *le choix d'une base beaucoup plus petite que 10.* Des deux seules qui pourraient entrer le plus sérieusement en question : 4 ou 6, nous pensons que 4 serait la meilleure. En comparaison du point de vuè de la pratique, toutes les autres considérations, comme nous l'avons montré plus haut, entre autres celles de divisibilité, jouent un rôle secondaire. Et à ce point de vue, le système quaternaire est en moyenne douze fois plus facile à apprendre que le système sénaire (voir V *c*). Comme on n'aurait jamais à opérer qu'avec 1, 2 ou 3, et que toutes les tables quaternaires se réduisent à neuf règles, la sûreté des calculs serait beaucoup plus grande et la routine du calcul une fois acquise s'oublierait beaucoup moins vite et demanderait beaucoup moins d'exercice dans le premier système que dans le second. On pourrait aussi, avec plus de facilité, trouver en fait de chiffres des signes simples qu'il serait possible de réunir deux par deux, voire même trois par trois, d'un seul trait de plume.

c). — Mais l'avantage le plus considérable du système quaternaire nous paraît résider dans *sa grande souplesse.* Voici ce que nous entendons : si le peuple était en possession du système quaternaire, la majorité en resterait peut-être à la base 4, se familiarisant avec l'art du calcul à un beaucoup plus haut degré que ce n'est le cas actuellement dans le système décimal. En plus : toutes les bonnes écoles amèneraient insensiblement leurs élèves à multiplier de tête et sans hésitation un nombre d'un chiffre par un nombre de deux chiffres, et cela correspondrait à peu près, en ce qui concerne la rapidité et la sûreté des opérations numériques, à l'usage d'un système à base 8. Tout calculateur habile étendrait son « grand livret » jusqu'à 16 fois 16, réunissant *toujours* deux chiffres en un seul; il passerait ainsi de la base 4 à la base 16. Les plus doués en arriveraient à multiplier de tête un nombre de deux chiffres par un de trois, ce qui correspondrait à l'usage de la base 32, et additionneraient toujours trois chiffres à la fois. Quelques-uns prendraient aussi pour les multiplications les chiffres 3 par 3, passant ainsi à la base 64. L'exercice d'un système servirait de préparation pour passer à un autre à base plus élevée. Chacun pourrait trouver, par des degrés presque insensibles, le système le mieux approprié à ses facultés et à ses besoins. Ce passage *successif* d'un système à un autre, ce perfectionnement *graduel*, a une importance que l'on n'estime pas toujours à sa juste valeur.

L'importance éminente de « l'entraînement » est connue; le sportsman aussi bien que l'homme de science l'apprécient. S'agit-il d'acquérir une habileté déterminée, dans n'importe quel domaine, tout le monde sait quelle est l'importance d'un développement graduel pour acquérir l'habileté en question peu à peu, par petits degrés successifs. Or, l'art du calcul numérique tient à la fois du sport et de la science, et pour passer maître dans cet art, l'entraînement graduel est plus qu'utile : il est nécessaire. Mais voilà que ce développement graduel est fortement entravé, et à tous les degrés, par un mal fondamental : le système décimal. Pour les commençants et les calculateurs médiocres, la base 10 est beaucoup trop grande; pour les calculateurs hors ligne, cette même base 10 est trop étroite en elle-même, mais trop grande tout de même, parce que ses puissances successives 100, 1000, ....., sont trop éloignées l'une de l'autre pour que le passage de l'une à l'autre constitue un « entraînement graduel ». — Dans le système quaternaire, il n'y a pas de sauts si brusques, puisque les puissances successives de 4 sont des nombres beaucoup plus rapprochés les uns des autres que ne le sont les puissances successives de 10.

Cette souplesse est naturellement maximale dans le système binaire, puisqu'il a la base la plus petite possible. C'est parmi les systèmes à base $2^n$ dérivés du système binaire par un groupement des chiffres $n$ à $n$, que chacun trouverait le plus facilement, par degrés insensibles, le système le mieux approprié à ses aptitudes. Dans la série de ces puissances, 4 et 16 ont sans doute, au point de vue de la numération, la plus grande importance pour la pratique. — Du reste, ces systèmes à base $2^n$ présentent une série de beautés et de propriétés élégantes qui ont déjà captivé l'intérêt de plus d'un mathématicien et attiré l'attention de plus d'un chercheur de curiosités arithmétiques, mais dans le détail desquelles le sujet de notre étude aussi bien que le cadre de ce travail ne nous permettent pas d'entrer.

**d).** Résumons brièvement les conclusions auxquelles conduit l'ensemble des considérations que nous avons faites :

1) De tous les points de vue auxquels on peut se placer pour étudier et comparer entre eux les différents systèmes de numération, le plus important est celui de la pratique, lorsqu'il s'agit de décider de la question : quel nombre conviendrait-il le mieux de choisir comme base ?

2) La base doit être un nombre pair aussi petit que possible.

3) Etant données les limites de la mémoire humaine et ce qu'en moyenne elle peut s'assimiler de façon durable, c'est le nombre 4 qu'il conviendrait le mieux de choisir comme base du système de numération.

4) Les avantages principaux du système à base 4 (système quaternaire ou tétradique) sont les suivants :

*a*) Il s'apprend en moyenne environ 240 fois plus facilement que le système décimal. Abstraction faite du système binaire ou dyadique, et 3 étant exclu comme base, c'est le système quaternaire qui est de beaucoup le plus facile à s'approprier.

*b*) Une fois appris, il s'oublie le moins vite, car toutes les tables se réduisent à 9 règles.

*c*) Pour conserver la routine du calcul une fois acquise, il faut beaucoup moins d'exercice que dans n'importe quel autre système à base plus grande.

*d*) Puisqu'on n'a jamais à y opérer qu'avec les nombres 1, 2 ou 3, les calculs s'y font avec une facilité et une sûreté plus grandes que dans tout système à base supérieure.

*e*) Il possède une grande souplesse, la série 4, 16, 64,... des puissances de la base 4 permettant à chacun de choisir parmi les systèmes à base $4^n$ celui qui convient le mieux à ses aptitudes et à ses besoins. Tout calculateur habile ferait usage de la base 16, en groupant les chiffres quaternaires deux par deux.

## Remarques.

1) — Même dans un détail amusant, les systèmes par 4 et par 16 trouvent une « justification » qui n'est pas sans intérêt : elle se rapporte à l'art si simple de compter sur les doigts. Cet art fut l'origine du système décimal. C'est dans cette particularité que l'homme naît avec 5 doigts à chaque main et à chaque pied qu'il faut chercher l'explication naturelle du fait surprenant, que