Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1910)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUEL NOMBRE CONVIENDRAIT LE MIEUX COMME BASE DU SYSTÈME DE NUMÉRATION ?

Autor: Du Pasquier, L. Gustave

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12784

QUEL NOMBRE CONVIENDRAIT LE MIEUX COMME BASE DU SYSTÈME DE NUMÉRATION ?

SOMMAIRE :

Introduction.

L'art de calculer étant d'une grande importance pour toutes les classes de la population, il est d'un haut intérêt de donner une réponse aussi complète que possible à la question : *quel nombre conviendrait-il le mieux de choisir comme base du système de numération ?* Cette question a surtout une importance pratique, car pour le mathématicien, l'art de calculer consiste plutôt à éviter les calculs.

Il n'est pas étonnant que cette question de la meilleure base du système de numération ait été discutée très souvent, qu'elle ait provoqué de nombreux travaux sur ce sujet. Ce n'est pas notre but d'en donner une analyse ; cela nous mènerait trop loin. Nous ne nous attacherons pas non plus à l'ordre chronologique, d'autant moins que le résultat auquel nous arriverons, diffère de la réponse que la grande majorité des auteurs donne à la question. Il nous paraît surtout que la plupart ne tiennent pas du tout ou pas suffisamment compte des essais pratiques qui ont été faits dans ce domaine, et ce sont ces expériences qui nous paraissent justement avoir une importance capitale.

Commençons par rappeler brièvement la définition connue d'un « système de numération à base b » ; il y a lieu de distinguer d'une part *la numération parlée,* d'autre part *la numération écrite.* Dans la *numération parlée,* il faut: 1° un nom particulier pour chaque unité simple, c'est-à-dire pour les nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ b-1\ :$$

2° un nom particulier pour chacune des unités d'ordre supérieur, c'est-à-dire pour les nombres

$$b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ \ldots\ldots$$

3° au moyen de ces éléments fixes, choisis une fois pour toutes, on compose *le nom* de n'importe quel autre nombre d'après un schéma invariable et qui peut se représenter par l'expression

$$a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + a_3 \cdot b^3 + a_4 \cdot b^4 + \ldots + a_n \cdot b^n \tag{1}$$

ordonnée suivant les puissances entières et positives de la base b, et où les coefficients

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ldots,\ a_n$$

sont tous des nombres entiers non négatifs et plus petits que la base

$$0 \leqq a_i < b \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.\ \ldots\ldots) \tag{2}$$

Dans la *numération écrite,* nous ferons exclusivement usage du « principe de position » qu'appliquent actuellement les peuples civilisés pour écrire les nombres. Le symbole

$$a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0\ , \tag{3}$$

en vertu de ce principe de position, n'est qu'une abréviation de l'expression (1) avec les inégalités (2).

Ceci étant posé, nous examinerons quelle base b serait la plus avantageuse. La question doit être envisagée à plusieurs points de vue. Certaines réflexions s'imposent de suite, même à qui se borne à un examen superficiel ; il en est d'autres, et précisément les plus importantes, qui ont échappé à la plupart des auteurs traitant cette question, ou du moins n'ont pas été appréciées à leur juste valeur. Nous nous placerons successivement à six points de vue différents, afin d'élucider la question sous toutes ses faces.

I. — Point de vue de la divisibilité.

C'est lui qui se présente en premier lieu, aussi s'est-il imposé à tous ceux qui ont étudié notre question.

a).— *Les règles de la divisibilité* des nombres entiers dérivent et dépendent de la divisibilité du nombre b choisi comme base et de ses autres propriétés arithmétiques. Ces règles changent avec la base. Un grief bien connu contre le système décimal est par exemple le fait que la règle de divisibilité par 7 est trop compliquée pour donner des avantages bien grands dans son application pratique. A ce point de vue, *les nombres possédant beaucoup de diviseurs seraient à préférer*, donc les multiples de 6, spécialement le nombre 6 lui-même, car il donne des règles de divisibilité très simples pour 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc.

Remarquons cependant que telle règle de divisibilité simple dans le système décimal deviendra peut-être compliquée dans un système à base quelconque, par exemple la divisibilité par 5 dans le système duo-décimal, ou la divisibilité par 11 dans le système à base 18. Aucune base ne saurait satisfaire ici à toutes les exigences. Nous dirons donc que dans ce domaine, *les avantages et les désavantages se compensent à peu près.* Nous dirons en plus que *ni les uns, ni les autres n'ont une grande importance* et ne tirent à conséquence. Preuve : l'avantage que la divisibilité et les restes de la division par 2 et par 5 ressortent clairement des chiffres romains, est loin d'être assez considérable pour compenser les grands défauts de cette numération. Tout ce que l'on a su tirer des règles de divisibilité se réduit, jusqu'ici, à quelques avantages de calcul et à des preuves. Chaque base ayant ses règles de divisibilité données, entraîne ses avantages particuliers, ses preuves particulières.

b). — *La division doit donner autant que possible des développements finis.* C'est même l'un des grands griefs contre le système décimal ; la division par 3 y donne des fractions infinies, et l'on a relativement souvent affaire à des tiers ou à des fractions dont le dénominateur contient 3 comme facteur premier ; on est alors obligé, lorsqu'on veut employer des fractions « systématiques », (c'est-à-dire dans notre système de numération des fractions « décimales »), de se contenter de résultats plus ou moins approximatifs, d'évaluer l'ordre de grandeur des erreurs commises.

Mais ici encore, il faut dire qu'aucune base ne peut satisfaire à toutes les exigences, car elle devrait contenir comme facteurs premiers les nombres 2, 3, 5, 7, 11,... ; c'est dire qu'elle devrait être très grande, et nous verrons plus loin que de telles bases sont impossibles. Quel que soit donc le choix auquel on s'arrête, les développements infinis se présenteront toujours dans un grand nombre de cas.

Le résultat le plus certain auquel on arrive en partant de ce point de vue, c'est que la base du système de numération doit être *un nombre pair*. En effet : le nombre 2 se distingue de tous les autres par tant de propriétés remarquables, le nombre 2 figure si souvent dans les formules théoriques, il entre si souvent comme diviseur dans les calculs de la pratique que toute base impaire entraînerait des désavantages très sensibles.

Doit-on préférer une base renfermant, à côté du nombre 2, le facteur premier 3 ou plutôt le facteur premier 5 ? ou bien une base renfermant une puissance de 2 supérieure à la première ? ou, à côté de 2^n, une puissance supérieure d'un autre facteur premier ? Devrait-on, par exemple, préférer 18 ou 24 à 12 ? ou bien 20 à 10 ? Il est bien difficile de trancher de telles questions à priori, si l'on voulait tenir compte *uniquement* de la divisibilité.

Si ces considérations devaient décider à elles seules du choix d'une base, le système par 6 ou par 12 réunirait sans doute une majorité ; mais il y aurait probablement une très forte minorité pour faire observer combien les avantages que le meilleur des systèmes présente sur ses concurrents ont peu de valeur.

En se plaçant uniquement au point de vue de la divisibilité, on arrive ainsi finalement à la conclusion suivante : *La base b du système de numération doit être un nombre pair en tout cas, un nombre à beaucoup de diviseurs, un nombre contenant le plus possible de facteurs premiers.* — Ce premier point de vue est donc favorable aux grandes bases.

II. — **Le nombre des éléments fixes servant à construire tout le système.**

Nous venons de montrer que les considérations de divisibilité militent en faveur d'un grand nombre pair, mais qu'elles laissent encore beaucoup de place à l'arbitraire, qu'elles sont loin de donner à notre question une réponse univoque et décisive ; il faut donc considérer encore d'autres moments, entre autres le nombre des éléments fixes qui servent à la construction même du système.

Nous posons comme principe que *ce nombre doit être aussi restreint que possible.* — Il y a de nouveau lieu de distinguer entre la numération parlée et la numération écrite.

a). — *L'expression verbale des nombres.* — Comme nous l'avons rappelé plus haut, on doit inventer un nom spécial d'abord pour chaque unité simple 1, 2, 3..... (b-1), ensuite pour chacune des unités des différents ordres : b, b^2, b^3, b^4..... L'on voit immédiatement que le nombre de ces noms primitifs au moyen desquels on compose celui de tous les autres nombres dépend de la limite jusqu'à laquelle on veut pousser la numération, et qu'il augmente indéfiniment avec cette limite ; il dépend en outre de la base ; si celle-ci est petite, par exemple, il faut avoir à disposition peu de noms seulement pour les unités simples, mais davantage pour les puissances de la base. Il y a là deux facteurs dont l'un tend à diminuer, l'autre à augmenter le nombre de noms nécessaires.

Prenons comme exemple le système binaire ou dyadique et supposons qu'on veuille pousser la numération jusqu'à mille ; on aura besoin de noms spéciaux pour les nombres suivants : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, donc de 10 noms. Pour compter jusqu'à 1000 dans le système quaternaire, il faut des noms pour 1, 2, 3, 4, 16, 64, 256, donc 7 noms en tout, puisqu'à l'aide du schéma

$$a_0 + a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 4^2 + a_3 \cdot 4^3 + a_4 \cdot 4^4$$

on est alors en état de composer le nom de tous les nombres jusqu'à 1000 (et même jusqu'à 1023). Dans notre système décimal, on a besoin de 12 noms, savoir 9 pour les unités simples, puis dix, cent, mille, si l'on veut pouvoir compter jusqu'à mille. En poursuivant de cette façon l'idée, on arrive au tableau suivant donnant le *nombre des noms nécessaires* pour former un système de numération parlée,

la base du système étant

La numération étant poussée jusqu'à	2	3	4	5	6	8	10	12	16	20	24	30	60	100	......
10^3	10	8	7	8	8	10	12	13	17	21	25	31	60	100	......
10^6	20	14	12	12	12	13	15	16	19	23	27	33	62	102	......
10^9	30	20	17	16	16	16	18	19	22	25	29	35	64	103	......
10^{12}	40	27	22	21	20	20	21	22	24	28	31	37	65	105	......
10^{18}	60	39	32	29	28	26	27	27	29	32	36	41	69	108	......
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	......

Il serait facile d'étendre ce tableau, et si nous ne l'avons pas fait, c'est parce qu'on n'a pour ainsi dire jamais occasion ou besoin, dans la vie pratique, d'énoncer des nombres supérieurs au milliard, encore moins des nombres au delà de 10^{18}. Il ressort donc du tableau ci-dessus que pour employer le minimum de noms dans la numération *parlée*, on devrait arrêter le choix de la base à l'un des nombres 4, 6, 8 ou 10 (puisque les nombres impairs sont à exclure comme bases).

b). — *L'expression écrite des nombres.* — Plus la base d'un système numéral est grande, moins il faut de chiffres pour écrire un nombre donné. Les calculateurs appuieront toujours sur ce fait, car il constitue un très grand avantage des systèmes à grande base puisque, dans ces derniers, tous les calculs peuvent s'effectuer en un nombre moins grand d'opérations.

Cherchons à évaluer numériquement cet avantage des grandes bases et, dans ce but, considérons un nombre entier n, choisi à volonté, mais fixe.

Supposons que dans le premier système, à base b, il faille β chiffres pour représenter le nombre n. Si le premier chiffre est 1 et tous les autres zéro, on obtiendra $b^{\beta-1}$. C'est le plus petit des nombres à β chiffres. Le plus grand est égal à $b^{\beta} - 1$.

Les inégalités suivantes ont donc lieu :

$$b^{\beta-1} < n < b^{\beta} .$$

Quel que soit n, il existera par conséquent une grandeur non négative ε_1, moindre que l'unité, et telle que

$$n = b^{\beta-1+\varepsilon_1} , \quad 0 \leqq \varepsilon_1 < 1 .$$

Supposons maintenant que dans un deuxième système de numération, dont la base soit a, il faille α chiffres pour représenter le même nombre n. Celui-ci sera au minimum $a^{\alpha-1}$, au maximum $a^{\alpha} - 1$, d'où les inégalités

$$a^{\alpha-1} \leqq n < a^{\alpha} .$$

Il existera donc une quantité ε, non négative et moindre que l'unité et telle, que

$$n = a^{\alpha-1+\varepsilon} , \quad \text{avec la condition } 0 \leqq \varepsilon < 1 .$$

Nous pouvons donc poser l'égalité :

$$a^{\alpha-1+\varepsilon} = b^{\beta-1+\varepsilon_1}$$

d'où

$$(\alpha - 1 + \varepsilon) \log a = (\beta - 1 + \varepsilon_1) \log b$$

$$\frac{\log a}{\log b} = \frac{\beta - 1 + \varepsilon_1}{\alpha - 1 + \varepsilon} .$$

Les quantités $(-1 + \varepsilon_1)$ et $(-1 + \varepsilon)$ étant en valeur absolue moindres que l'unité, le rapport ci-dessus peut être, en moyenne, égalé à $\frac{\beta}{\alpha}$; il n'en diffère que d'une quantité négligeable, surtout lorsque β et α ne sont pas très petits. L'égalité ci-dessus exprime le théorème suivant : *le nombre des chiffres nécessaires pour représenter un nombre donné diminue en raison inverse du logarithme de la base.* Autrement dit : si l'on représente un même nombre n une première fois au moyen de α chiffres dans un système à base a, une deuxième fois au moyen de β chiffres dans un système à base b, une troisième fois au moyen de γ chiffres dans un système à base c, etc., on aura, en moyenne, les égalités

$$\alpha \cdot \log a = \beta \cdot \log b = \gamma \cdot \log c = \text{constante.}$$

L'égalité : $\beta \log b =$ constante montre clairement que le nombre des chiffres diminue à mesure que la base augmente, mais elle montre aussi que cette diminution est très lente ; on sait en effet que la fonction logarithmique croît avec l'argument, même au delà de toute limite, mais moins rapidement que n'importe quelle puissance. Ce fait est illustré par le petit tableau suivant qui donne le nombre des chiffres nécessaires pour écrire un nombre n qui a six chiffres dans notre système décimal :

$$100000 \leq n \leq 999999 .$$

Pour écrire ce même nombre n,

	la base du système étant									
	2	3	4	6	8	10	16	32	100	1000	1000000
il faut un nombre de chiffres égal à	17 à 20	11 à 13	9 à 10	7 à 8	6 à 7	6	5	4	3	2	1

En partant uniquement de ce point de vue, on arrive ainsi à la conclusion : la base b doit être aussi grande que possible.

III. — La clarté dans la représentation des nombres.

Il y a bien d'autres choses à considérer que la divisibilité et le nombre des chiffres. Il est évident qu'il ne suffit pas de compter ces derniers, mais qu'il faut tenir compte aussi de leur degré plus ou moins grand de simplicité. En recherchant à ce point de vue si un système peut être regardé comme avantageux, on n'est pas tenu de toujours employer nos chiffres conventionnels dits « arabes » ; on se servira au contraire, pour chaque base, du système de signes qui sera le plus commode. Nous aurons à considérer :

a). — *La difficulté d'écrire les nombres et de les relire.* Cette difficulté est un produit de deux facteurs. Le *premier* est le nombre des signes. Lorsqu'un nombre est écrit avec beaucoup de chiffres, il est plus difficile de le concevoir avec précision, de le saisir exactement, que lorsqu'il s'écrit avec peu de chiffres; et puisque le nombre des chiffres diminue quand la base augmente, puisqu'il est inversément proportionnel au logarithme de la base, c'est une raison pour préférer une base aussi grande que possible.

Le *deuxième facteur* est la difficulté d'écrire les signes de manière à ce qu'ils se distinguent facilement les uns des autres, et de les relire ensuite. Or, le nombre total des signes différents entre eux étant égal à la base elle-même, ce deuxième facteur croît évidemment avec la base; mais il croît beaucoup plus rapidement qu'elle. Il n'est cependant pas si facile d'en donner une expression numérique précise, comme nous sommes en état de le faire pour le premier facteur; nous pouvons seulement dire : le deuxième milite en faveur des petites bases.

La résultante de ces deux facteurs dépend de la quantité dont le deuxième croît; elle fait pencher la balance du côté des petites bases.

b). — *La difficulté de saisir un nombre avec précision et à première vue,* de reconnaître immédiatement ses propriétés arithmétiques élémentaires. Ici aussi, l'on doit tenir compte de plusieurs facteurs.

1° D'abord, la base doit contenir autant de diviseurs que possible. Chaque divisibilité de la base facilite en effet la lecture des nombres, car les multiples de ces diviseurs sont en quelque sorte des points de repère. Ainsi, dans notre système décimal, les multiples de 5 constituent de ces points d'orientation dans la suite ininterrompue des nombres, de même les multiples de 2. S'il s'agissait uniquement d'écrire des nombres ou de copier des nombres déjà écrits, on pourrait prendre pour base des nombres assez grands sans recourir à des signes trop compliqués; mais il s'agit surtout de comprendre ce qui est écrit; à la seule vue d'un signe, on doit savoir quel est son rang, quelles sont les propriétés arithmétiques les plus simples du nombre en question. C'est cette lecture qui se trouve facilitée, quand la base contient beaucoup de diviseurs. On manquerait de ces points d'orientation, si la base était un grand nombre premier; on aurait alors une suite de nombres se ressemblant tous, et en lisant un nombre, il serait plus difficile de se rendre compte immédiatement de ses propriétés arithmétiques. Bien qu'il soit difficile d'exprimer par une formule mathématique cette dépendance entre la divisibilité de la base et la facilité d'embrasser d'un seul coup d'œil l'ensemble des propriétés arithmétiques d'un nombre écrit, il est hors de doute que cette dépendance existe et qu'elle milite en faveur des bases possédant beaucoup de diviseurs, spécialement en faveur des multiples de 6.

2° Il y a ensuite le fait que les petits nombres sont plus faciles à dominer que les grands. Voici ce que nous entendons : La plupart des hommes ne peuvent juger que d'un très petit nombre d'objets semblables, à première vue et sans les compter. En voyant par exemple sur un rayon d'une bibliothèque des volumes alignés, tous semblablement reliés et de même grandeur, tout le monde saura dire immédiatement s'il y en a 2 ou 3, ou bien 3 ou 4, d'une façon tout intuitive et sans avoir besoin de compter. Mais rares sont les personnes qui savent distinguer ainsi au premier coup d'œil entre 9 et 10 unités de même espèce, ou entre 15 et 16, sans avoir besoin de compter. Il n'est pas non plus facile de diviser à vue d'œil un intervalle en 10 parties égales. Par un long exercice, on arrive, il est vrai, à faire des progrès surprenants dans ce domaine, mais beaucoup d'observateurs, même très habiles, ont conscience de commencer par une division préalable en 2 ou en 4 parties. — Or, dans les systèmes de numération à très petite base, chaque signe simple correspond à un nombre dont la signification est immédiatement claire à la plupart d'entre nous. Ce fait constitue un avantage considérable des systèmes à très petite base, un avantage capable de compenser à lui seul l'emploi d'un plus grand nombre de signes.

Remarquons enfin que s'il est difficile de juger avec une précision mathématique des avantages que présentent les systèmes qui ont pour base un nombre très grand, *en tant qu'il s'agit d'écrire et de lire les nombres,* on peut affirmer qu'ils ne sont pas bien considérables et qu'à ce troisième point de vue de la clarté dans la représentation des nombres, les avantages des systèmes à petite base semblent l'emporter.

c). — *Résultats des expériences.* A ce point de vue, des essais ont été faits par quelques mathématiciens et pédagogues. Les expériences pratiques les plus étendues sont sans doute celles qu'a entreprises M. T. N. Thiele, ancien professeur d'astronomie à l'Université de Copenhague, avec quelques-uns de ses élèves. (On sait que les observations astronomiques donnent lieu à de très longs calculs.) Ces expérimentateurs se sont habitués à un système à base 30 et pendant longtemps ont effectué des calculs dans ce système. Comme il fallait 30 signes primitifs pour représenter les unités simples et le zéro, ils ont profité de la circonstance que l'alphabet nous offre une série de signes dont l'ordre est bien connu, et ont employé comme chiffres les lettres de l'alphabet, avec quelques suppléments empruntés à des alphabets étrangers. Après avoir vécu dans ce système à grande base, ils ont tiré de leurs expériences les conclusions suivantes :

1) Il est presque impossible, dans un pareil système, d'effectuer les calculs d'une manière indépendante, sans l'aide de tables.

« Le petit livret », ou table de Pythagore, se compose de $29^2 = 841$ règles, et c'est un travail presque surhumain de les apprendre par cœur, de s'en rendre maître de façon à n'avoir aucune hésitation.

2) L'écriture et la lecture des nombres deviennent difficiles ; pour éviter des confusions, il faut que les signes soient écrits avec une grande précision.

3) La connaissance que la pratique ordinaire nous fait acquérir de l'ordre de succession des lettres est tout à fait insuffisante, lorsqu'il s'agit de juger immédiatement lequel de 2 nombres est le plus grand. Il devient difficile d'avoir conscience, à la seule vue d'un signe, des propriétés arithmétiques les plus simples du nombre représenté par ce signe ; par exemple, ces expérimentateurs avaient grande peine à se rappeler quels signes représentaient les nombres pairs, ou les multiples de 3, ou les multiples de 5, ou de 6, etc.

Les conclusions à tirer de ces expériences, confirmées du reste par plusieurs autres, sont :

a) L'avantage d'écrire les nombres avec moins de chiffres se trouve non seulement compensé, mais de beaucoup surpassé par la difficulté de distinguer les uns des autres les nombreux chiffres d'un système à grande base.

b) Les difficultés en ce qui concerne l'écriture et la lecture des nombres, surtout la difficulté d'apprendre par cœur les tables de Pythagore correspondantes, croissent en même temps que la base, mais avec une rapidité telle que la limite de ce qui est humainement possible ne dépasse guère 30.

IV. — Réunion de plusieurs signes en un seul.

Nous venons de faire remarquer que dans un système de numération à grande base, on a besoin de beaucoup de signes, qu'il faut donc recourir à des signes compliqués, que c'est là un désavantage. On pourrait être tenté de faire le raisonnement inverse et de conclure ainsi : dans un système à petite base, on a besoin de peu de signes seulement, donc on peut choisir des signes simples, et c'est un avantage. Toute vraisemblable que soit cette conclusion, on manque de faits expérimentaux pour la corroborer. M. Thiele et ses élèves ont fait et font encore de nombreux calculs dans des systèmes à très petite base, mais ils n'ont pas choisi les signes les plus simples possibles; ils ont pris comme chiffres des signes ne différant que très peu de nos « chiffres arabes » et n'ont obtenu ainsi d'autre avantage que de pouvoir écrire couramment les nombres composés.

Si l'on voulait choisir les meilleurs signes possibles, il faudrait tenir compte de certaines considérations secondaires ; par exemple, il faudrait que chaque signe, quoique simple, saute aux yeux, il faudrait surtout qu'on puisse corriger facilement et avec précision les signes mal écrits, si possible sans être obligé d'effacer ; il faudrait donc que les chiffres, tout en se distinguant nettement les uns des autres, puissent être facilement transformés les uns dans les autres.

Proposons-nous de prendre comme base du système de numération, au lieu du nombre b, l'une de ses puissances, par exemple b^2. On voit clairement que cela revient à grouper les chiffres deux par deux. Imaginons qu'on veuille écrire le nombre 120401 de notre système décimal dans le système centésimal; il ne faudra que 3 chiffres au lieu de 6, et l'on pourrait les représenter par (12) ; (04) ; (01). Prendre comme base b^3 revient à grouper les chiffres 3 par 3. Le même nombre s'écrirait par exemple dans le système millésimal au moyen de 2 chiffres seulement : (120) ; (401). Au point de vue de la clarté ou de la simplicité de l'écriture, cela reviendrait à peu près au même que d'employer la base b, puisque l'avantage d'employer un nombre moins grand de chiffres, serait compensé exactement par la gêne d'avoir à écrire séparément chacun des signes composés du système.

Cette méthode de prendre comme base une puissance du nombre primitif, présente de réels avantages uniquement dans les systèmes à très petite base ; car on peut alors choisir comme chiffres primitifs des signes très simples, puis apporter quelque simplification dans les signes composés, en réunissant deux ou trois signes en un seul trait continu. Prenons comme exemple le système binaire ou dyadique. Représentons zéro et un, les deux seuls chiffres de ce système, de la façon suivante : le « un » par un *trait vertical* allant à volonté soit de haut en bas : I, soit de bas en haut : / ; le zéro par un *demi-cercle* : ∪. Les nombres entiers positifs s'écriront alors :

I,	I∪,	II,	I∪∪,	I∪I,	II∪,	III,	I∪∪∪,	I∪∪I,
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,

I∪I∪,	I∪II,	II∪∪,	.....
10,	11,	12,	....

Considérons le nombre

écrit avec 12 chiffres dans le système binaire, égal à

$$1 + 1.2 + 1.4 + 1.8 + 1.16 + 1.32 + 1.64 + 1.512 + 1.2048 = 2687$$

dans le système décimal. Si nous prenons comme base 4, ce qui revient à grouper les signes 2 par 2, nous pourrons écrire le même nombre , c'est-à-dire au moyen de 6 chiffres. Prenant comme base $2^3 = 8$, nous réunirons les chiffres 3 par 3 et pourrons écrire le même nombre , donc au moyen de 4 chiffres. Prenant comme base $2^4 = 16$, nous pourrons représenter le même nombre par 3 chiffres : . Cette simplification dans l'écriture n'est pas possible, si l'on emploie nos chiffres usuels dits arabes ; elle exige en plus que les signes primordiaux soient simples et pas trop nombreux. En un mot : *elle milite en faveur des petites bases, et même très fortement*, car dans ces systèmes à très petite base, il sera aisé de passer de la base b à la base b^2 et d'éviter ainsi le désavantage d'un trop grand nombre de chiffres. Citons à ce propos une étude intéressante et très originale que M. G. Peano publia en 1898 dans les « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 34, intitulée : « La numerazione binaria applicata alla stenografia ». L'auteur y expose entre autres une méthode permettant de réunir 8 chiffres à la fois, ce qui revient à opérer avec la base $2^8 = 256$.

Résumons toutes les considérations précédentes. Les résultats acquis se bornent en somme à ceci :

1) *La base d'un système de numération doit être un nombre pair.*

2) *Les nombres supérieurs à 30 sont exclus comme base.*

3) Les petites bases ont plusieurs avantages sur les grandes, mais *c'est seulement dans des points d'ordre secondaire que le choix de la base fait une différence sensible.* Dans d'autres points, avantages et désavantages se tiennent à peu près en équilibre, quand on compare les différents systèmes.

En somme, nous n'avons obtenu d'autre résultat que le droit de faire abstraction d'une série de considérations que l'on a souvent cherché à faire prévaloir, surtout en faveur du système duodécimal, mais avec peu de raison, comme nous croyons l'avoir montré.

Nous n'avons pas encore abordé le point de vue qui est capital selon nous pour décider de la question : celui de la pratique.

V. — Point de vue de la pratique.

Nous le caractérisons par la double question suivante : dans quel système de numération est-il le plus facile d'apprendre à calculer et de pratiquer l'art du calcul ?

a). — *Apprendre à calculer.* On sait que l'enseignement du calcul comprend deux parties. D'abord une partie proprement mathématique, où il s'agit d'exposer et de faire comprendre quelques vérités arithmétiques élémentaires ; elle est commune à toutes les bases, et pour cette raison, nous ne nous y arrêterons pas.

Ensuite une partie qui doit être apprise par cœur, savoir les tables d'addition et de multiplication. Voyons en premier lieu combien de règles ces tables comprennent dans le système à base b. — En fait de *tables d'addition,* il faut savoir par cœur les résultats de

	$1+1$			
	$1+2$	$2+2$		
	$1+3$	$2+3$	$3+3$	
	....	....	....	.....
	$1+(b-1)$	$2+(b-1)$	$3+(b-1)$	..... $(b-1)+(b-1)$
Nombre :	$b-1$	$b-2$	$b-3$	 1

c'est-à-dire : en tout

$$(b-1)+(b-2)+(b-3)+\ldots\ldots+2+1=\frac{b(b-1)}{2}$$

résultats particuliers. — En fait de *tables de multiplication,* le nombre ci-dessus est diminué de $(b-1)$, puisque les résultats de la multiplication par 1 sont tous remplacés par une seule règle ; il faut savoir par cœur combien font :

$$\begin{array}{r} 2\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ \ldots\ldots\ 2\cdot(b-1) \\ 3\cdot 3,\ \ldots\ldots\ 3\cdot(b-1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (b-1)\,(b-1) \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\,(b-1)\,(b-2)$$

résultats particuliers, ce qui porte leur nombre total à

$$\frac{1}{2}\,b\,(b-1)+\frac{1}{2}\,(b-1)\,(b-2)=(b-1)^2$$

Donc, en faisant abstraction des propositions générales relatives aux propriétés particulières de zéro et de un, ce sont $(b-1)^2$ résultats qu'on doit se graver dans la mémoire. Nous constatons donc ce premier fait important :

Le nombre des résultats particuliers croît aussi rapidement que le carré de la base (plus exactement que $(b-1)^2$). Exemples : Dans le système binaire ou dyadique, dont la base est la plus petite possible : $b=2$, il suffit de se rappeler une seule chose, c'est que $1+1$ s'écrit 10.

Le système par 4 ou quaternaire demande qu'on se rappelle 9 règles :

six pour l'addition : $1+1=2$, $1+2=3$, $1+3=10$
$2+2=10$, $2+3=11$

trois pour la multiplication : $2.2=10$, $2.3=12$
$3.3=21$.

Le système par 6	demande l'application	de	25 règles,
Notre système décimal	» »	»	81 »
Le système duodécimal	» »	»	121 »
» par 16	» »	»	225 »
» par 30	» »	»	841 » , etc.

Examinons en second lieu le travail de mémoire qu'exige l'assimilation de tous ces résultats. Il ne suffit pas d'en acquérir une connaissance approximative et de pouvoir répondre après un moment de réflexion. Il faut au contraire se rendre complètement maître de la matière. On doit avoir à tout moment la réponse prête et sans jamais se tromper; autrement, on ne saurait calculer utilement et avoir confiance dans l'exactitude des résultats. Le nombre des résultats particuliers qu'on doit se rappeler ne donne donc lui-même en aucune façon la mesure de la grandeur et de la difficulté du travail d'appropriation. — Pour chaque résultat nouveau, cette difficulté est déterminée par le nombre de ceux qu'on s'est déjà approprié, puisque tous doivent être indépendants de ce dernier; voilà pourquoi il convient plutôt de prendre pour mesure de cette difficulté *le carré* du nombre des résultats particuliers; et comme ce nombre augmente aussi rapidement que le carré de la base (nous venons de démontrer qu'il est égal à $(b-1)^2$), la difficulté d'assimilation, elle, croît comme la quatrième puissance de la base (proportionnelle à $(b-1)^4$). — Cette évaluation reste encore au-dessous de la réalité. En effet, ce qu'on a une fois appris, il faut le fixer par un exercice très long et qui doit être continué jusqu'à ce que chaque résultat particulier se soit présenté assez souvent pour être définitivement gravé dans la mémoire. Ce dernier travail est d'autant plus long que la base choisie exige la connaissance d'un nombre plus considérable de ces résultats. Si donc on veut évaluer mathématiquement la grandeur de ce travail d'assimilation, on doit admettre, deux bases différentes étant données, que les difficultés qu'elles présentent pour le travail d'appropriation des tables correspondantes sont entre elles dans un rapport plus grand que le rapport de leur quatrième puissance. Ce rapport correspond à peu près à celui de leur cinquième puissance. Nous exprimerons ce résultat par le théorème suivant :

Deux bases différentes étant données, les difficultés que présente le travail d'appropriation des tables correspondantes sont entre elles à peu près dans le rapport des cinquièmes puissances des bases. Les bases étant désignées par a et b, le rapport en question sera exprimé par $a^5 : b^5$ [plus exactement par $(a-1)^5 : (b-1)^5$].

Comme application de ce résultat, comparons quelques systèmes avec notre système décimal ($a=10$).

D'abord le système binaire ($b=2$) ; en comparaison du système décimal, l'exercice du calcul dans le système binaire ne coûterait pour ainsi dire aucune peine, puisque le rapport en question se réduit à $1^5 : 9^5 = 1 : 59049$.

Dans le système quaternaire, le rapport en question devient $(4-1)^5 : (10-1)^5 = 1 : 3^5 = 1 : 243$. C'est dire qu'il coûterait en moyenne 243 fois moins de peine et de travail d'apprendre à calculer dans le système par quatre que dans le système décimal.

Pour le système à base 6, le rapport en question est

$$(6-1)^5 : (10-1)^5 = 5^5 : 9^5 = 3125 : 59049 = 1 : 18{,}8\ldots$$

Autrement dit : il est à peu près 18 fois plus facile d'apprendre à calculer dans le système sénaire que dans notre système décimal.

Pour le système duodécimal, ce rapport devient

$$(12-1)^5 : (10-1)^5 = 11^5 : 9^5 = 161051 : 59049 = 2{,}7\ldots : 1$$

Il faut donc sacrifier environ 2 $^1/_2$ fois plus de temps et de peine pour apprendre à calculer dans le système duodécimal qu'il n'en faut déjà pour notre système décimal.

Dans le système à base 16, ce même rapport est

$$15^5 : 9^5 = 5^5 : 3^5 = 3125 : 243 = 12{,}8\ldots : 1$$

et dans le système de numération à base 30 :

$$29^5 : 9^5 = 20\ 511\ 149 : 59\ 049 = 347{,}3\ldots : 1$$

En songeant combien de temps et de peine un enfant et son maître d'arithmétique doivent sacrifier, en moyenne, pour que l'enfant arrive à calculer couramment, en pensant ensuite qu'il faudrait y mettre encore au moins 340 fois plus de temps et d'efforts, on comprend mieux qu'une telle base est impossible, à plus forte raison une plus grande encore, surtout que ce travail ne se borne pas à une première appropriation, mais qu'il est nécessaire de s'exercer souvent pour conserver la pratique acquise. — L'expérience des calculateurs de Copenhague, de M. T. N. Thiele et de ses élèves, s'accorde bien avec les évaluations précédentes ; elle vient corroborer nos déductions théoriques. Théorie et pratique conduisent toutes deux au résultat suivant : *pour que l'art du calcul s'apprenne avec un minimum d'efforts dans un minimum de temps, il faut que la base du système de numération soit aussi petite que possible.*

b). — *Pratiquer l'art du calcul.* — Tout calculateur, si exercé soit-il, opérera plus rapidement ou plus sûrement avec les nombres 1, 2, 3 qu'avec 7, 8 ou 9, surtout quand il s'agit de multiplier ou de diviser. Copier un nombre ou calculer son double ou son triple, se fait avec beaucoup plus de promptitude et de sûreté que calculer le septuple ou l'octuple de ce même nombre. Nous pensons que même le plus habile calculateur n'arrive pas à calculer aussi vite, ni surtout aussi sûrement, avec les grands chiffres (7, 8, 9) qu'avec les petits (1, 2, 3). Or, si la base du système de numération était par exemple 4, on n'aurait jamais à opérer qu'avec 1, 2, 3 ; ce qui revient à dire que pour multiplier ou diviser, on n'aurait jamais autre chose à faire (hormis l'addition et la soustraction) qu'à copier un nombre ou écrire son double ou son triple ; cela entraînerait une rapidité considérable et une très grande sûreté des opérations. L'avantage par rapport à la rapidité des calculs et à la sûreté qu'on acquiert est si grand que M. Thiele par exemple, lorsqu'il devait faire beaucoup de calculs sur des nombres donnés une fois pour toutes, tels que résultats d'observations astronomiques, préférait transformer ces nombres dans le système quaternaire, puis effectuer tous les calculs dans ce dernier système, puis retransformer les résultats dans le système décimal; il arrivait de cette façon plus vite et surtout plus sûrement au but qu'en calculant entièrement dans le système décimal.

La routine une fois acquise, il s'agit de la conserver. Pour cela, il faut s'exercer beaucoup et souvent, surtout après des périodes pendant lesquelles on n'a pas ou très peu calculé. Or, plus la base est grande, plus cet exercice doit être prolongé et répété ; l'oubli, faute d'un exercice suffisant, est beaucoup moins à craindre et en tout cas moins prononcé et plus facile à réparer pour les systèmes à petite base. C'est encore une raison, et une très forte, pour préférer ces derniers.

Voici donc la conclusion qui s'impose avec force quand on se place au point de vue de la pratique : *la base du système de numé-*

ration doit être aussi petite que possible. — A notre avis, ce point de vue pratique, pourtant si fondamental, n'a pas été suffisamment remarqué et mis en lumière par presque tous les auteurs qui ont traité cette question. Un grand nombre d'entre eux arrive, par exemple, à la conclusion qu'il faudrait introduire le système duodécimal ! Selon nous, ce serait un malheur, puisque cela obligerait l'humanité à sacrifier encore deux et demi fois plus de temps pour apprendre à calculer.

L'important nous paraît être la réponse à la question suivante : la mémoire humaine est-elle assez forte, en moyenne, pour porter le fardeau du système décimal ? Il serait intéressant d'avoir des renseignements précis sur le temps (nécessairement long) qu'on emploie pour apprendre à chaque enfant les tables du système décimal, ainsi que des données sur le temps au bout duquel on a oublié une partie essentielle de ce que l'on a appris. Il y a sans doute des différences extrêmement grandes dans les dispositions des individus pour le calcul ; il y a des hommes pour qui le système décimal avec ses 81 règles est comme un jeu, mais leur nombre est bien restreint. Si l'on prend au hasard une nombreuse société humaine, la majorité des membres ne possédera presque jamais pleinement la pratique élémentaire du calcul. La plupart des hommes ont naturellement, une fois dans leur vie, appris par cœur les tables de Pythagore ; mais faute de s'exercer suffisamment, surtout dans la multiplication, ils les oublient plus ou moins ; pour la plupart, c'est un effort que d'effectuer une multiplication ou une division quelque peu étendue, ils ne la font pas sans difficulté et sans une certaine méfiance quant au résultat. On peut soutenir la thèse que le système décimal n'a pas réussi à devenir la propriété pleine et entière de toute la partie civilisée de l'humanité. Nous ne citerons comme preuve que l'expérience suivante que nous avons si souvent eu l'occasion de faire et que plusieurs professeurs de mathématiques nous ont confirmée : prenez une classe d'une trentaine d'élèves d'une de nos écoles moyennes ; faites-leur faire quelques simples multiplications ou divisions avec des nombres donnés de quatre ou cinq chiffres ; la classe vous fournira une dizaine de résultats différents, et aucun élève ne sera fermement convaincu d'avoir le résultat juste. Même si vous faites faire une simple addition de plusieurs nombres de cinq ou six chiffres qui se rencontrent pourtant couramment dans la pratique, il est rare que la classe obtienne le résultat juste avec l'unanimité désirable et désirée ; et le temps nécessaire pour effectuer ces calculs est hors de proportion avec leur caractère élémentaire.

Nous expliquons ce phénomène attristant en grande partie par le fait suivant : le système décimal s'approche beaucoup trop de la limite de ce que la mémoire humaine peut, en moyenne, s'assimiler et retenir de façon durable dans ce domaine. La question que nous formulions plus haut semble devoir être tranchée dans le sens négatif. *Si l'on veut que l'art du calcul devienne familier à chacun,* dans son ensemble et non seulement dans l'une de ses parties, *il faut remplacer 10 par une base plus petite.*

c). — Notice historique. — L'un des premiers qui soit arrivé à la même conclusion, à la suite d'expériences personnelles, est sans doute M. O. Lehmann, professeur de mathématiques au Gymnase Saint-Nicolas à Leipzig. Il a recommandé surtout le système sénaire ($b = 6$) et a publié une série de petits écrits sur cette question dans les années de 1870 à 1873. Lehmann était d'abord, comme il raconte lui-même, partisan convaincu du système duodécimal qui le séduisait, ainsi que tant d'autres, par ses avantages de divisibilité ; un beau jour, le Dr Lehmann eut l'idée d'essayer le système à base 6 ; ce nouveau système excita vivement son enthousiasme, car il présentait non seulement de grands avantages de divisibilité, mais il s'apprenait avec une facilité énorme, en comparaison du système duodécimal ; d'après nos évaluations ci-dessus, il faut en moyenne à peu près 50 fois moins de peine, puisque

$$11^5 : 5^5 = 161\,051 : 3125 = 51{,}5... : 1$$

Lehmann ne connaissait pas ce rapport exact, mais il trouva que les mêmes élèves qui avaient tant de peine à pratiquer couramment le système duodécimal et l'oubliaient si facilement, arrivaient beaucoup plus rapidement à la même routine dans le système sénaire et ne la perdait pas si vite. Il baptisa son nouveau système de numération « les nombres Seh » (die Sehzahlen), « seh » étant une abréviation de « sechs » qui est le nom allemand pour six. Lehmann était si enchanté de sa découverte qu'il fit répandre, parmi le public de Leipzig et ailleurs, un « appel » imprimé à des milliers d'exemplaires et portant le titre significatif : « révolution des nombres » (Revolution der Zahlen, oder die Seh in Schrift und Sprache eingeführt von Dr Otto Lehmann, Mathematikus am St-Nicolaigymnasium in Leipzig).

Voici, à titre de curiosité, la traduction française du commencement de cet appel : « Appel ! Ecoutez, citoyens de Leipzig ! écoutez, habitants de l'Allemagne ! écoutez, vous tous, gens lettrés et cultivés de toutes les nations ! Au nom de l'humanité entière, au nom de toutes les générations à venir, je vous adresse mon appel ! Et quand vous vous serez convaincus, comme j'ose m'y attendre, de la facilité de calculer avec les nombres Seh, unissez votre voix à la mienne pour introduire les nombres Seh dans le langage écrit et parlé. Qui donc serait appelé à faire le premier pas sinon vous, porteurs de la culture, promoteurs de la civilisation ?... »

Cet appel chaleureux du mathématicien Lehmann n'eut pas un succès pratique très grand, pour des raisons que nous n'avons pas à analyser ici ; l'opinion publique s'émut davantage de la révolution à Paris que de la « révolution des nombres ». Plus tard, Lehmann publia un « Beiblatt zur Revolution der Zahlen », en 1872, un « Zweites Beiblatt zur Revolution der Zahlen » (parus tous deux chez Heinr. Hunger, Bosenstrasse, 1, Leipzig). Un ami plus fortuné que Lehmann et à qui ce dernier fit partager son enthousiasme « sénaire » avança les fonds nécessaires, de sorte que l'inventeur put publier des tables étendues : tables de logarithmes, tables des fonctions trigonométriques, etc. dans le système à base 6. Elles furent imprimées en caractères « lehmanniens » chez C.-W. Vollrath, éditées par J.-J. Weber, et portent comme date, également en chiffres de Lehmann, 1 2 4 0 1, c'est-à-dire :

$$1 \cdot 1 + 0 \cdot 6 + 4 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^4 = 1873.$$

Lehmann voulait réformer à cette occasion non seulement le système de numération, mais encore toutes les monnaies et la division du quadrant ; il fait à ce sujet des propositions concrètes ingénieuses et utilisant les avantages de son système de numération. Il reconnut plus tard lui-même qu'en adressant son appel à toutes les couches sociales et au nom de toutes les générations à venir, il avait fait une bévue ; dans un de ses « suppléments », il écrit entre autres : « Si l'un ou l'autre trouvait que certains passages écrits par moi sont exagérés ou excentriques, je ne nierai pas qu'une sorte d'enthousiasme pour la bonne cause m'ait dicté, par-ci par-là, des paroles exaltées. Mais j'espère que l'on ne méconnaîtra pas la bonne intention ; j'espère surtout que l'on ne croira pas que mon exaltation (! ?) ait dégénéré en véritable hallucination. J'ai la conscience de décidément *vouloir* le bien et la conviction aussi en somme de vouloir *le bien...*»

Les nombres « seh » du docteur Lehmann peuvent certainement soulever plusieurs critiques. Ainsi les signes qu'il a choisis sont loin d'être les meilleurs possibles ; ils ont l'avantage de pouvoir être écrits d'un seul trait de plume, mais ils sont encore plus compliqués et en partie plus faciles à confondre que nos chiffres dits arabes. Mais Lehmann a raison sur un point capital, et c'est pourquoi nous l'avons mentionné, savoir : il y aurait très grand avantage à substituer au système décimal non pas le système duodécimal, mais le système à base 6. Seulement, dans son enthousiasme exagéré pour son système, il oublie de rechercher s'il n'y en aurait pas d'autres encore préférables au système sénaire.

Nous ne nous arrêterons pas à tous les autres auteurs ayant écrit sur les différents systèmes de numération ; ils ne font pas suffisamment ressortir l'importance du point de vue de la pratique, cette difficulté d'acquérir et de maintenir la routine du calcul. Du reste, la liste en serait longue et nous écarterait trop du sujet nettement délimité de cette étude.

Le système répondant le mieux à cette exigence serait naturellement le système binaire. Là, il n'y aurait pour de bonnes raisons rien à oublier, puisque toutes les tables se réduisent à cette seule règle : $1 + 1$ s'écrit 10. En effectuant des divisions binaires, on n'aurait jamais ces tâtonnements ennuyeux qui se présentent souvent dans le système décimal, *a fortiori* dans d'autres systèmes à base encore plus grande que 10. Mais le plus sensible désavantage du système binaire est le grand nombre de mots qu'il faut pour énoncer les nombres, surtout les nombreux chiffres nécessaires à leur écriture ; vingt chiffres pour représenter un million, nombre assez fréquemment employé, c'est décidément trop long et incommode. On pourrait obvier à cet inconvénient, comme nous l'avons indiqué plus haut, en réunissant plusieurs chiffres en un seul. La méthode préconisée par M. G. Peano permet de rassembler huit signes à la fois et de passer ainsi à la base 2^8 ou 256, par une figure octogonale composée de rayons partant tous d'un même centre. C'est renoncer à la simplicité caractéristique du système dyadique. (M. Peano tire de cette numération, soit dit en passant, tout un système de sténographie, très ingénieux et original ; il a même résolu par ce moyen le problème insoluble jusqu'alors de construire une machine à écrire pour la sténographie[1]).

Le succès du système binaire dépendrait du reste en grande partie de l'heureux choix de ses deux chiffres. Les essais ont échoué jusqu'ici. Si l'on voulait opérer avec une machine à calcul, le système binaire l'emporterait sur tous les autres, car la difficulté des opérations croît en même temps que le nombre des chiffres.

Après le système dyadique, puisqu'il faut un nombre pair comme base, vient le système quaternaire. Tout ce qu'il y a à apprendre là se réduit à 9 règles. C'est si peu que nous doutons que quelqu'un puisse oublier les tables de ce système, s'il consacre une demi-heure à les apprendre et quelques heures à faire des multiplications et des divisions quaternaires. Et quelques heures, c'est si peu de chose en comparaison du temps que nous avons tous mis à nous approprier le système décimal ! Nous devons faire observer, en recommandant un pareil essai, que chacun peut le faire sans craindre que sa facilité de calculer dans le système décimal en souffre le moins du monde, ou qu'il en vienne à confondre les deux systèmes ; on ne doit naturellement pas écrire les chiffres tout à fait de même manière dans les deux systèmes, mais il suffit, d'un autre côté, qu'on puisse reconnaître, quelque temps après l'exécu-

[1] Voir sa note en italien, citée plus haut, publiée dans les Actes de l'Acad. Roy. d. Sciences de Turin, vol. 34, 1898-99.

tion, dans quel système de numération le calcul a été fait. N'étant pas sûr que d'autres emploient les mêmes chiffres que nous, nous nous abstenons de les publier, de même que les tables que nous avons calculées directement dans le système quaternaire, pour nous y exercer.

Mentionnons le premier auteur ayant proposé un système de numération à base 4. C'est sans doute *Erhard Weigel*, né à Weiden, en 1625 et mort en 1699; il fut professeur à l'université de Iéna où le philosophe Leibniz fut son plus célèbre auditeur. Bien que jouissant à cette époque d'une grande renommée, Erhard Weigel n'était nullement un mathématicien au génie profond. Il considérait son « Tetractys [1] » comme son œuvre principale et le recommanda dans plusieurs écrits, spécialement en 1673, au monde savant d'alors. *Tetractys* n'est autre chose que le système de numération à base 4. *Weigel* pense qu'on doit le préférer au système décimal, parce que selon lui la division en 10 parties est artificielle, tandis que la division en quatre parties est la plus naturelle, ce qu'il cherche à prouver par des exemples très artificiels. La lecture de cet ouvrage vous laisse l'impression que Weigel l'a écrit avant tout dans le but de se faire remarquer, de paraître original, de se rendre populaire. Au beau milieu du texte latin, il propose des noms allemands: « Secht » pour 4^2; « Schock » pour 4^3, (« Schock » est du reste le mot allemand pour « soixantaine »); plus tard, Weigel remplace aussi le mot quatre par un néologisme : « Erff », d'où les formations « Zwerff » pour $2 \cdot 4$ et « Dreff » pour $3 \cdot 4$. Quelques-uns de ces termes ont été repris par d'autres qui ont traité le sujet d'un système non décimal de numération et que nous passons sous silence.

Il ne s'agit point de savoir quel nombre ou quel système est le plus « naturel », question bien difficile à trancher, si l'on ne veut pas jouer sur des mots; il s'agit de décider quel système de numération est le plus avantageux et le plus commode pour la pratique.

Quant au système sénaire, il faut à peu près 12 fois plus de travail pour y arriver à la même habileté que dans le système à base 4. En effet : $(6 - 1)^5 : (4 - 1)^5 = 3125 : 243 = 12{,}8... : 1$. Les expérimentateurs de Copenhague ont appris le système sénaire d'après les indications du mathématicien Lehmann et s'y sont exercés assez longtemps pour reconnaître les grands avantages de ce système sur notre système décimal. Mais après avoir essayé le système quaternaire, ils ont complètement mis de côté le système à base 6.

---

[1] « Erhardi Weigelii, Artium Architectonicarum Supremi Directoris et Prof. Publ. Tetractys, summum tum Arithmeticæ tum Philosophiæ discursivæ compendium, artis magnæ sciendi genuina radix ». Ienæ MDCLXXIII.

Résumons les considérations qu'impose la pratique : si l'on se place exclusivement au point de vue de la difficulté à surmonter pour apprendre à calculer, pour acquérir et maintenir la routine du calcul, le système décimal doit être absolument condamné et remplacé aussi tôt que possible par le système à base 4 (ce dernier a en outre l'avantage de pouvoir être pratiqué à côté du système décimal). Vis-à-vis du système quaternaire, le système décimal se présente comme étant la seule cause de cet enseignement si pénible et si difficile qui tourmente la jeunesse scolaire et continuera, hélas, à tourmenter les enfants de bien des générations encore, et pourtant il n'aboutit à d'autre résultat qu'à une pratique suffisante de l'addition et de la soustraction, tandis que la multiplication et la division s'oublient plus ou moins, faute de l'exercice constant que le système décimal exige à un beaucoup plus haut degré que les systèmes à base plus petite. M. T. N. Thiele exprime ses réflexions en écrivant : « Le système décimal forme un triste contraste avec ce principe démocratique que les institutions sociales doivent favoriser également tout le monde, non pas seulement de petites minorités ».

Faut-il donc croire, en revanche, que le système décimal favorise effectivement « l'aristocratie des calculateurs ? » Nous éluciderons cette question en nous plaçant à un sixième et dernier point de vue.

VI. — **Point de vue évolutionniste.**

Pour « l'homme moyen », le système décimal est à rejeter absolument; nous pensons l'avoir démontré ci-dessus. Mais qu'en est-il pour les grands calculateurs ? Le petit nombre de ceux qui sont doués des facultés relativement grandes qu'exige le système décimal acquièrent-ils dans le calcul une habileté telle qu'ils ne pourraient calculer aussi bien, et encore mieux, dans d'autres systèmes ?

a). — Tous les bons calculateurs veulent une base aussi grande que possible, pour la raison que nous avons déjà indiquée plus haut (voir II, *b*). Là, nous avons montré comment le nombre des signes nécessaires pour représenter un nombre diminue quand la base augmente ; nous devons ajouter maintenant, qu'en même temps diminue aussi le nombre des « opérations partielles » dont tout calcul se compose. En effet, *toute opération sur de grands nombres se compose d'opérations partielles ou intermédiaires.* Prenons comme exemple deux nombres à six chiffres, tels que $a = 213465$, $c = 926543$. Pour former la somme $a + c$, on additionnera d'abord les unités simples $5 + 3$, puis les dizaines $6 + 4$, puis les centaines $4 + 5$, etc., c'est-à-dire qu'il y aura au moins six opérations partielles à effectuer. — De même, pour former la différence $a - c$. — Pour trouver le produit $a \cdot c$, il faut multiplier le multiplicande *a* d'abord par 3, puis par 4, puis par 5, etc., enfin par 9, donc séparément par chacun des chiffres du multiplicateur *c*, ce qui exige au moins 36 opérations partielles, ensuite additionner ces six produits, ce qui demande de nouveau 27 opérations au moins. La formation du produit de deux nombres à six chiffres exige donc, au minimum, 63 opérations intermédiaires. Or, en diminuant le nombre des chiffres, on diminue le nombre des opérations partielles. C'est dire qu'on augmente non seulement *la rapidité* des calculs, mais aussi leur *degré de confiance*, puisqu'on diminue les chances d'erreurs.

Cherchons à évaluer cet avantage en nombres précis. Pour les additions et les soustractions, le rapport du nombre des opérations partielles est à peu près le même que celui du nombre des chiffres, donc, comme nous l'avons prouvé plus haut (voir II, *b*), inversement proportionnel au logarithme des bases. — Pour les multiplications et les divisions, le rapport en question devient plus favorable aux grandes bases ; on peut approximativement l'égaler au carré du rapport précédent ; en d'autres termes : lorsqu'il s'agit de multiplication ou de division, le nombre des opérations intermédiaires croît en raison inverse du carré du logarithme de la base. — Appliquons cette évaluation aux systèmes décimal et quaternaire. L'avantage du premier sur le deuxième est exprimé pour les additions par le rapport $\log 10 : \log 4 \sim 5 : 3$, pour les multiplications par le rapport $(\log 10)^2 : (\log 4)^2$, presque équivalent à $3 : 1$.

Autrement dit : en employant le système décimal plutôt que le système quaternaire, on gagne en rapidité de calcul à peu près $66\,^2/_3\,\%$ sur les additions et presque $200\,\%$ sur les multiplications. Cet avantage prononcé des grandes bases est contrebalancé par un fait que nous avons également fait ressortir (voir V, *b*), c'est que même le calculateur le plus habile ne pourrait opérer aussi vite ni aussi sûrement avec les grands chiffres qu'avec les petits ; mais cette différence en faveur des petites bases ne compense certainement pas l'autre, et tous les bons calculateurs seront d'accord pour préférer une grande base à une petite. Le système à base 16 par exemple, en comparaison de notre système décimal, ferait gagner en rapidité de calcul $20\,\%$ sur les additions et $44\,\%$ sur les multiplications, puisque le rapport $\log 16 : \log 10$ est à peu près égal au rapport $6 : 5$.

Nous avons donc deux partis adverses dans le monde des gens qui ont à calculer : d'un côté une petite minorité, nous l'appelions tout à l'heure « l'aristocratie des calculateurs » ; ce sont ceux qui sont doués d'une grande facilité de calcul ; ils voudraient tous remplacer la base 10 par une plus grande, ils désirent en vérité une base aussi grande que possible. — D'un autre côté une immense majorité, nous pourrions l'appeler « la démocratie des calculateurs » ; c'est la grande masse de ceux dont les facultés ne se portent pas vers le calcul numérique ; ceux-là voudraient tous remplacer la base 10 par une plus petite, eux désirent une base aussi petite que possible. — Aristocrates et démocrates peuvent faire valoir de très bonnes raisons ; et comme une base doit être fixée, la même pour tout le monde, il pourrait sembler au premier abord que démocrates et aristocrates (dans ce domaine comme dans d'autres) défendront chacun sa cause si bien que ce qui existe, c'est-à-dire le système décimal, continuera à exister indéfiniment.

b). — En examinant de près comment procède « l'aristocratie des calculateurs », on arrive cependant à un tout autre résultat : on voit qu'il y a moyen de contenter les deux partis ! On constate d'abord qu'il y a une énorme différence entre les membres de cette aristocratie-là, et qu'avec beaucoup d'exercice, il est possible de faire des progrès surprenants. On constate ensuite que les grands calculateurs opèrent toujours en réunissant les chiffres deux par deux, ou trois par trois, si possible même quatre par quatre ; les bons calculateurs arrivent à opérer avec les nombres de deux chiffres aussi couramment et avec la même habileté qu'un calculateur « moyen » avec les nombres d'un seul chiffre. En d'autres termes : les bons calculateurs ne se contentent pas du système décimal, mais opèrent dans le système centésimal ou millésimal, ils s'efforcent d'atteindre les plus hauts degrés de l'échelle $10, 10^2, 10^3, 10^4, \ldots$

C'est du reste ce que font tous ceux qui emploient les grandes tables publiées par Crelle, lesquelles contiennent les produits deux par deux de tous les nombres entiers jusqu'à 1000 fois 1000. En reprenant notre exemple de ci-dessus : 213 465 . 926 543, et posant, pour abréger et en même temps généraliser : $(a) = 213$, $(b) = 465$, $(c) = 926$, $(d) = 543$, au lieu d'avoir à multiplier deux nombres de six chiffres, c'est comme si l'on n'avait affaire qu'à deux nombres de deux chiffres :

$$\begin{array}{rrrr} & & (a) & (b) \\ & & (c) & (d) \\ \hline & & & \times \\ & & \times & \\ & & \times & \\ & \times & & \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

(Chaque point représente un chiffre, et chaque croix un résultat à trouver dans la table, donc un nombre de 6 ou 7 chiffres, dans notre exemple particulier.) Au lieu d'un minimum de 63 opérations intermédiaires, on n'en a plus que 14 à effectuer, et même seulement 7, si, en additionnant les résultats partiels, on prend également les chiffres 3 par 3. Bien qu'on perde beaucoup de temps à feuilleter le gros volume des tables, l'avantage est encore considérable ; sans cette perte de temps, il aurait pour expression approchée $(\log 1000)^2 : (\log 10)^2 = 9 : 1$. Un grand nombre de calculateurs font ainsi, grâce à ces tables étendues, en quelque sorte un usage journalier du système à base 1000.

« L'aristocratie des calculateurs » sait donc fort bien se procurer les grandes bases dont elle a besoin, mais elle est gênée par les difficultés de l'exécution. Additionner de tête des nombres de 2 chiffres, ce n'est pas bien difficile, mais peu nombreux sont ceux qui peuvent multiplier de tête et sans hésitation un nombre de 2 chiffres par un chiffre, à plus forte raison par un autre nombre de 2 chiffres. Il n'est pas donné à chacun d'étendre son « petit livret » jusqu'à 100 fois 100. Les grands calculateurs sont aussi mécontents du système décimal et ne le défendront pas ; mais ils ne se plaignent point de ce que la base 10 soit trop grande en elle-même, ils se plaignent plutôt de ce qu'il faille monter si haut pour atteindre les degrés suivants de l'échelle, de ce que 10 soit trop grand pour que ses puissances puissent être d'un usage commode comme bases d'un système numéral.

Ainsi, tous les calculateurs, grands et petits, bons et mauvais, sont mécontents du système décimal, mais pour des raisons différentes. Or, il y a un moyen de les contenter tous en satisfaisant à ces diverses exigences ; et ce moyen consiste dans *le choix d'une base beaucoup plus petite que 10.* Des deux seules qui pourraient entrer le plus sérieusement en question : 4 ou 6, nous pensons que 4 serait la meilleure. En comparaison du point de vuè de la pratique, toutes les autres considérations, comme nous l'avons montré plus haut, entre autres celles de divisibilité, jouent un rôle secondaire. Et à ce point de vue, le système quaternaire est en moyenne douze fois plus facile à apprendre que le système sénaire (voir V *c*). Comme on n'aurait jamais à opérer qu'avec 1, 2 ou 3, et que toutes les tables quaternaires se réduisent à neuf règles, la sûreté des calculs serait beaucoup plus grande et la routine du calcul une fois acquise s'oublierait beaucoup moins vite et demanderait beaucoup moins d'exercice dans le premier système que dans le second. On pourrait aussi, avec plus de facilité, trouver en fait de chiffres des signes simples qu'il serait possible de réunir deux par deux, voire même trois par trois, d'un seul trait de plume.

c). — Mais l'avantage le plus considérable du système quaternaire nous paraît résider dans *sa grande souplesse.* Voici ce que nous entendons : si le peuple était en possession du système quaternaire, la majorité en resterait peut-être à la base 4, se familiarisant avec l'art du calcul à un beaucoup plus haut degré que ce n'est le cas actuellement dans le système décimal. En plus : toutes les bonnes écoles amèneraient insensiblement leurs élèves à multiplier de tête et sans hésitation un nombre d'un chiffre par un nombre de deux chiffres, et cela correspondrait à peu près, en ce qui concerne la rapidité et la sûreté des opérations numériques, à l'usage d'un système à base 8. Tout calculateur habile étendrait son « grand livret » jusqu'à 16 fois 16, réunissant *toujours* deux chiffres en un seul; il passerait ainsi de la base 4 à la base 16. Les plus doués en arriveraient à multiplier de tête un nombre de deux chiffres par un de trois, ce qui correspondrait à l'usage de la base 32, et additionneraient toujours trois chiffres à la fois. Quelques-uns prendraient aussi pour les multiplications les chiffres 3 par 3, passant ainsi à la base 64. L'exercice d'un système servirait de préparation pour passer à un autre à base plus élevée. Chacun pourrait trouver, par des degrés presque insensibles, le système le mieux approprié à ses facultés et à ses besoins. Ce passage *successif* d'un système à un autre, ce perfectionnement *graduel*, a une importance que l'on n'estime pas toujours à sa juste valeur.

L'importance éminente de « l'entraînement » est connue; le sportsman aussi bien que l'homme de science l'apprécient. S'agit-il d'acquérir une habileté déterminée, dans n'importe quel domaine, tout le monde sait quelle est l'importance d'un développement graduel pour acquérir l'habileté en question peu à peu, par petits degrés successifs. Or, l'art du calcul numérique tient à la fois du sport et de la science, et pour passer maître dans cet art, l'entraînement graduel est plus qu'utile : il est nécessaire. Mais voilà que ce développement graduel est fortement entravé, et à tous les degrés, par un mal fondamental : le système décimal. Pour les commençants et les calculateurs médiocres, la base 10 est beaucoup trop grande; pour les calculateurs hors ligne, cette même base 10 est trop étroite en elle-même, mais trop grande tout de même, parce que ses puissances successives 100, 1000, ..., sont trop éloignées l'une de l'autre pour que le passage de l'une à l'autre constitue un « entraînement graduel ». — Dans le système quaternaire, il n'y a pas de sauts si brusques, puisque les puissances successives de 4 sont des nombres beaucoup plus rapprochés les uns des autres que ne le sont les puissances successives de 10.

Cette souplesse est naturellement maximale dans le système binaire, puisqu'il a la base la plus petite possible. C'est parmi les systèmes à base 2^n dérivés du système binaire par un groupement des chiffres n à n, que chacun trouverait le plus facilement, par degrés insensibles, le système le mieux approprié à ses aptitudes. Dans la série de ces puissances, 4 et 16 ont sans doute, au point de vue de la numération, la plus grande importance pour la pratique. — Du reste, ces systèmes à base 2^n présentent une série de beautés et de propriétés élégantes qui ont déjà captivé l'intérêt de plus d'un mathématicien et attiré l'attention de plus d'un chercheur de curiosités arithmétiques, mais dans le détail desquelles le sujet de notre étude aussi bien que le cadre de ce travail ne nous permettent pas d'entrer.

d). Résumons brièvement les conclusions auxquelles conduit l'ensemble des considérations que nous avons faites :

1) De tous les points de vue auxquels on peut se placer pour étudier et comparer entre eux les différents systèmes de numération, le plus important est celui de la pratique, lorsqu'il s'agit de décider de la question : quel nombre conviendrait-il le mieux de choisir comme base ?

2) La base doit être un nombre pair aussi petit que possible.

3) Etant données les limites de la mémoire humaine et ce qu'en moyenne elle peut s'assimiler de façon durable, c'est le nombre 4 qu'il conviendrait le mieux de choisir comme base du système de numération.

4) Les avantages principaux du système à base 4 (système quaternaire ou tétradique) sont les suivants :

a) Il s'apprend en moyenne environ 240 fois plus facilement que le système décimal. Abstraction faite du système binaire ou dyadique, et 3 étant exclu comme base, c'est le système quaternaire qui est de beaucoup le plus facile à s'approprier.

b) Une fois appris, il s'oublie le moins vite, car toutes les tables se réduisent à 9 règles.

c) Pour conserver la routine du calcul une fois acquise, il faut beaucoup moins d'exercice que dans n'importe quel autre système à base plus grande.

d) Puisqu'on n'a jamais à y opérer qu'avec les nombres 1, 2 ou 3, les calculs s'y font avec une facilité et une sûreté plus grandes que dans tout système à base supérieure.

e) Il possède une grande souplesse, la série 4, 16, 64,... des puissances de la base 4 permettant à chacun de choisir parmi les systèmes à base 4^n celui qui convient le mieux à ses aptitudes et à ses besoins. Tout calculateur habile ferait usage de la base 16, en groupant les chiffres quaternaires deux par deux.

Remarques.

1) — Même dans un détail amusant, les systèmes par 4 et par 16 trouvent une « justification » qui n'est pas sans intérêt : elle se rapporte à l'art si simple de compter sur les doigts. Cet art fut l'origine du système décimal. C'est dans cette particularité que l'homme naît avec 5 doigts à chaque main et à chaque pied qu'il faut chercher l'explication naturelle du fait surprenant, que

tous les peuples de la terre chez lesquels le degré de la civilisation a permis d'en arriver à un véritable « système » de numération, ont comme base de ce système l'un des trois nombres 5, ou 10, ou 20 (à deux exceptions près). En se basant là-dessus, on a pu écrire « l'art de compter sur les doigts est le plus ferme rempart du système décimal ». — La question apparaît tout de même sous une autre face à qui fait glisser le pouce le long de chacun des autres doigts, en comptant dans le système quaternaire ou sexdécimal, mettant une unité pour chaque phalange et une pour la racine de chaque doigt.

2) — S'il s'agissait effectivement d'une réforme, il faudrait naturellement changer non seulement les noms des nombres en les adaptant à la base 4 (ou 16), mais aussi nos chiffres dits « arabes » ; il n'y aurait aucune raison de conserver ces signes compliqués et peu commodes. On en choisirait au contraire d'autres *plus simples*, en tenant compte des facteurs qu'il y a à considérer et que nous avons indiqués dans le cours de cette étude. Tout en étant simples et se distinguant nettement les uns des autres, s'écrivant chacun d'un seul trait de plume, ils devraient avoir la propriété de pouvoir être facilement transformés les uns dans les autres, de façon à permettre de corriger des signes mal écrits ou faux sans qu'on ait besoin de gratter ; ils devraient surtout pouvoir se lier commodément deux par deux en constituant, ainsi groupés, de nouveaux signes simples (les chiffres de la base 16) s'écrivant aussi d'un seul trait de plume. — Pour différentes raisons, nous nous abstiendrons de rendre compte des nombreux essais dont nous avons eu connaissance jusqu'ici, et de faire des propositions concrètes. Nous serons obligé envers quiconque voudra nous communiquer des renseignements ou des essais personnels dans ce sens.

3) — Une réforme est naturellement désirable, mais nous ne pensons pas qu'elle soit possible. On a dans presque tous les domaines des preuves indubitables de la force extraordinaire des idées conservatrices, et cette force en elle-même est déjà si grande que sans doute ni nos contemporains, ni nos descendants n'oseront jamais entreprendre d'échanger notre mauvais système de numération contre un bon ! Les difficultés à surmonter ne seraient du reste pas petites ; elles doivent paraître immenses à ceux qui auraient le plus à gagner à un changement et qui souffrent le plus de l'état de choses actuel, c'est-à-dire aux gens peu instruits. — Maintenant que le système décimal a été introduit dans presque tous les systèmes de monnaie et de mesure de toutes sortes, il faut poursuivre partout ces réformes. Nous sommes de ceux qui pensent que mieux vaut employer un seul système, même mauvais, d'une manière rationnelle, générale et conséquente, plutôt qu'un mélange quelconque de systèmes différents. Mais nous pensons qu'on aurait mieux fait encore si, avant de monopoliser le

système décimal, on en avait comparé les qualités avec celles d'autres systèmes. Les considérations que nous faisons valoir dans cette étude permettent d'entrevoir l'immensité de la perte de temps et d'efforts causée à l'humanité civilisée, par le fait qu'on n'a pas choisi la meilleure base possible pour le système de numération.

Nous avons voulu donner un exemple montrant qu'on a souvent raison de ne pas accepter aveuglément les traditions du bon vieux temps, que tout n'est pas bon dans ce que nous a légué un passé lointain.

L. Gustave Du Pasquier (Zurich).

CONSTRUCTIONS DE PLANIMÉTRIE

SOLUTIONS NOUVELLES DE PROBLÈMES COMPLIQUÉS PAR DES CONDITIONS PARTICULIÈRES

Les solutions géométriques peuvent être jugées à des points de vue bien différents :

Tandis que le *professeur* s'inquiète de la valeur pédagogique, de la clarté et de la simplicité ; — le *dessinateur* pratique, préfère la rapidité, l'exactitude et la facilité d'assimilation ; — le *savant* considère l'importance que la construction peut avoir pour la théorie, il recherche des affinités organiques, il examine quels services peuvent rendre divers instruments et se propose, comme en géométrographie, d'atteindre économiquement le résultat par un minimum de lignes auxiliaires.

On ne saurait exiger de toute solution qu'elle soit également satisfaisante à des points de vue aussi différents, quelquefois même opposés. Mais certains problèmes, pour ne pas donner cette triple satisfaction, n'en présentent pas moins un triple intérêt ; tels sont, croyons-nous, ceux qui sont traités ci-dessous.

En présentant ce matériel, que nous croyons absolument neuf, nous n'avons pas l'intention de comparer les jugements portés à différents points de vue sur quelques constructions, mais nous espérons procurer aux mathématiques scolaires la matière d'exercices simples, faciles à saisir et à exécuter. Telle de nos solutions pourra être utile au constructeur, et peut-être, enfin, ne sera pas sans intérêt au point de vue scientifique.