MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur les opérations entre nombres décimaux approchés.

1. — Dans la Note que l'*Enseignement mathématique* (p. 66, tome X, 1908) a consacrée à *une page élémentaire de Lagrange,* on recommande un procédé pour la multiplication de deux nombres décimaux approchés, que moi-même j'ai recommandé et justifié en 1904 (dans le *Periodico di Matematica*).

J'ai aussi donné, par la même occasion, un critérium pour obtenir le quotient de deux nombres décimaux approchés, sans une approximation illusoire; et ce critérium, que je justifie, consiste précisément à arrêter le diviseur quand le quotient a un chiffre de plus que celui des deux nombres (sur lesquels on opère) qui en a le moins. Cependant, à propos de la multiplication, il est nécessaire d'observer que la règle donnée par l'*arithmétique élémentaire* ordinaire, pour placer la virgule dans le produit, ne peut plus servir et qu'il faut donc une règle différente.

2. — Supposant connus les éléments de l'*algèbre,* j'ai trouvé plus opportun (*Periodico di Matematica,* 1895) d'appeler *ordre* d'un chiffre décimal « le nombre donnant le rang qu'il occupe en « comptant à partir du chiffre qui suit l'unités et attribuant à ce nombre « le signe + ou le signe —, suivant que l'on compte vers la gauche ou vers la droite. »

L'ordre d'un chiffre sera ainsi l'exposant de la puissance de 10 par laquelle le chiffre lui-même devrait être multiplié pour passer de sa valeur absolue (au sens de l'arithmétique élémentaire) à sa valeur relative. De cette définition, qui n'est peut-être pas nouvelle, dérivent d'importantes simplifications pour le calcul des nombres décimaux.

3. — Pour la règle en question (§ 1), il suffit d'observer que le dernier chiffre du premier produit partiel (qui correspond au premier chiffre, à gauche, du multiplicateur) a pour ordre la somme des ordres du dernier chiffre du multiplicande et du premier chiffre du multiplicateur.

```
 0,682
57,893784
---------
 34,10
   4774
    5456
     6138
      2046
---------
39,48
```

Ainsi, dans l'exemple ci-contre, les ordres du premier chiffre du multiplicateur et du dernier chiffre du multiplicande étant $+1$ et -3, l'ordre du dernier chiffre du premier produit partiel sera $1+(-3) = -2$.

4. — Pour placer la virgule dans le quotient, arrêté grâce au critérium indiqué (§ 1), il ne s'en suivra aucune règle nouvelle, mais de la définition précédente (§ 2) il résulte une règle beaucoup plus simple que celle de l'*arithmétique élémentaire* et qui peut s'appliquer plus opportunément, même quand la division est effectuée par le procédé ordinaire.

En effet, il suffit d'observer que l'ordre du premier chiffre du quotient doit être égal à l'ordre (connu) du dernier chiffre du premier produit partiel diminué de l'ordre du dernier chiffre du diviseur.

```
(I)   7,25738 : 0.34          (II)   0,067    : 612,3
       68       21,3                  6123     0,000109
        45                             577
        34                            55107
        117                            2593
        102
         15
```

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus (I), -2 étant l'ordre du dernier chiffre du diviseur et -1 l'ordre du dernier chiffre du premier produit partiel, l'ordre du premier chiffre du quotient sera $-1-(-2) = +1$. De même, dans l'exemple (II), on aura $-5-(-1) = -4$ par l'ordre du même premier chiffre du quotient.

5. — Un autre exemple des simplifications sus-mentionnées (§ 2) est donné par la recherche de la caractéristique du logarithme d'un nombre plus grand ou plus petit que l'unité, puisqu'elle est évidemment toujours égale à l'ordre du premier chiffre significatif du nombre lui-même. Ceci est, en substance, la règle donnée par Caillet (*Tables des logarithmes et co-logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques,* Vannes, 1890).

On a encore d'autres simplifications notables dans l'usage de la règle à calcul et dans l'exposition de toute la théorie des approximations numériques.

Livourne, avril 1909. G. Pesci.

Notations rationnelles pour le système vectoriel[1].

9. — *Remarques de* M. Cargill-G. Knott (Edimbourg).

MM. Burali-Forti et Marcolongo estiment avoir établi le *système minimum* d'analyse vectorielle, applicable à une classe étendue de problèmes physiques. La meilleure manière de juger de la valeur de leur assertion est l'examen de leurs ouvrages, *Elementi di calcolo vettoriale* et *Omografie vettoriali* récemment parus. Le premier de ces ouvrages est étroitement lié au projet présenté dans l'*Enseignement mathématique*. L'*Omografie vettoriali* introduit un certain nombre de fonctions et opérateurs nouveaux qui ne se trouvent pas dans le système appelé Système minimum. Au reste, cette *Omografie* n'est pas autre chose que la fonction vectorielle linéaire d'Hamilton, sans laquelle aucun progrès ne peut s'accomplir dans les applications physiques. Les auteurs introduisent dans leur *Elementi* une fonction K_σ qui appartient à l'*Omografie* et n'a pas de place dans leur système minimum ; ils prouvent ainsi l'insuffisance de ce système pour leur propre usage élémentaire.

Il n'est réellement pas facile de comprendre exactement ce qu'ils entendent par un système minimum. Est-ce un système basé sur le plus petit nombre possible d'axiomes, postulats ou définitions ? Ou bien le terme minimum s'applique-t-il au nombre de symboles d'opérations et de symboles de fonctions distincts qui doivent être introduits en plus de ceux généralement acceptés en mathématiques ? Pour trouver une réponse à ces questions, comparons leur système, tel qu'il se présente dans leur projet, avec les systèmes d'Hamilton et de Gibbs.

Les vecteurs et les scalaires sont théoriquement communs à tous; mais le vecteur d'Hamilton a une signification plus étendue, comprenant le « quadrantal versor », parce que les « quadrantal versors » se composent, suivant la loi du parallélogramme qui est la loi fondamentale distinguant les vecteurs des autres quantités orientées ou non orientées.

Le produit complet de vecteurs, $\mathbf{ab}$, $\mathbf{abc}$, etc., n'est admis que par Hamilton.

Les fonctions $V\mathbf{ab}$, $S\mathbf{ab}$; $\mathbf{a}.\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$; $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$; sont pratiquement identiques.

Il me semble que, sous ce rapport, la distinction faite par MM. Burali-Forti et Marcolongo entre les « symboles d'opérations » et les « symboles de fonctions » est purement artificielle. Par exemple, ils emploient $\sin(\mathbf{ab})$ pour indiquer le sinus de l'angle compris entre $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, symbole de fonction ; mais alors même que cette quantité est une partie tout aussi importante de $V\mathbf{ab}$ que toute

[1] Voir l'*Ens. math.*, XI[e] année, 1909, n° du 15 janvier, p. 41-45 ; n° du 15 mars, p. 124-134 ; n° du 15 mai, p. 211-217 ; n° du 15 juillet, p. 381 ; n° du 15 novembre, p. 459-466.

autre quantité comprise, ils utilisent pour cette fonction généralisée le « symbole d'opération » $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

L'opérateur différentiel vectoriel ∇, que Tait a si puissamment développé avec la méthode de calcul d'Hamilton, n'est que partiellement représenté, dans le système de Gibbs, par ∇, $\nabla.$, $\nabla\times$ et dans le projet de « système minimum » par *grad*, *div*, *rot*. De plus, ces expressions doivent être déterminées comme opérateurs ou fonctions, tandis que dans le système d'Hamilton la seule définition ∇ embrasse le tout.

Le i et le $e^{i\varphi}$ que MM. Burali-Forti et Marcolongo introduisent pour les rotations dans un plan sont des cas particuliers du *verseur* d'Hamilton, ce dernier étant un élément important de son système. Ces expressions n'ont aucune relation logique avec la méthode vectorielle des analystes italiens et leur introduction est une confession implicite de faiblesse inhérente à leur système.

La fonction vectorielle linéaire Φ de Hamilton est utilisée par Gibbs, mais ne se trouve pas dans le « système minimum ». Les auteurs se rendent compte de cette omission en développant la théorie dans leur volume supplémentaire *Omografie vettoriali*. A part des changements superficiels de notations et la particularisation de certaines fonctions, il n'y a rien d'essentiel dans ce livre qui ne se trouve déjà dans les traités d'Hamilton et de Tait. Leurs notations $\frac{du}{d\mathrm{P}}$ et $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$ sont simplement $\mathrm{S}(\ )\nabla.u$ et $\mathrm{S}(\ )\nabla.\mathbf{u}$ et sont par conséquent complètement traités dans le système d'Hamilton sans qu'il soit nécessaire d'introduire ou de définir de nouveaux opérateurs.

Nous voyons donc que, en ce qui concerne l'économie de définition ou de symbolisme, le projet présenté par MM. Burali-Forti et Marcolongo n'est en rien supérieur à celui de Gibbs. Nous voyons également que ce qui, dans le système d'Hamilton, s'obtient au moyen des symboles caractéristiques S, V, ∇, Φ exige dans le « système minimum » 11 (ou tout au moins 9) symboles d'opérations et de fonctions, savoir : $\times$, $\wedge$, grad, rot, div, Δ, Δ', α, grad α, $\frac{du}{d\mathrm{P}}$, $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$. Pour prouver cette assertion, je donne ici les expressions équivalentes :

$\mathrm{S}\mathbf{ab} = -\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	$\left.\begin{matrix}\mathbf{ab}\\ \nabla\mathbf{u}\end{matrix}\right\}$ seulement dans Hamilton.
$\mathrm{V}\mathbf{ab} = \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$	
$\nabla u =$ grad u	$\Phi = \alpha$
$\mathrm{V}\nabla\mathbf{u} =$ rot $\mathbf{u}$	$\Phi\nabla =$ grad α
$\mathrm{S}\nabla\mathbf{u} =$ div $\mathbf{u}$	$\mathrm{S}\mathbf{t}\nabla.\mathbf{u} = -\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\mathbf{t}$
$\nabla^2 u = -\Delta u$	
$\nabla^2\mathbf{u} = -\Delta'\mathbf{u}$	$\mathrm{S}\mathbf{t}\nabla.u = -\frac{du}{d\mathrm{P}}\mathbf{t}$

Δ et Δ' peuvent être supprimés puisqu'ils peuvent être exprimés au moyen de *grad*, *rot* et *div*.

$$\begin{aligned}\nabla^2 u = \nabla\nabla u &= S\nabla(\nabla u)\\ &= -\text{ div grad } u\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla\nabla\mathbf{u} &= \nabla S\nabla\mathbf{u} + V\nabla V\nabla\mathbf{u}\\ &= -\text{ grad div } \mathbf{u} + \text{rot rot } \mathbf{u}\,.\end{aligned}$$

Dans le calcul d'Hamilton, ce sont des *identités* obtenues par des transformations évidentes.

Toutes ces complications de *grad*, *rot* et *div* proviennent de ce que bien des auteurs d'analyse vectorielle négligent le produit complet de vecteurs. C'est ce fait que je me propose d'examiner avec quelques détails.

L'introduction d'un vecteur comme symbole d'une quantité susceptible des opérations généralisées de multiplication et de division est due à Hamilton. Avant le développement de son calcul, la seule loi reconnue pour les vecteurs était la loi intitulée : loi du parallélogramme, loi de la composition et décomposition des vitesses et des forces. Ayant défini le vecteur comme une quantité satisfaisant à la loi du parallélogramme, l'analyste doit examiner la signification qu'il faut attacher à un produit ou à un quotient de vecteurs. Cette signification doit être obtenue par le moyen géométrique le plus simple, tenant compte de l'interprétation analytique des procédés généralisés de multiplication et de division. Comme un produit de deux longueurs n'est pas une longueur, il n'y a pas de raison pour admettre *a priori* que le produit de deux vecteurs est un vecteur. Cela donne évidemment une quantité d'une certaine espèce. Ecrivons-la $\mathbf{ab} = p$. Si ces expressions doivent obéir aux lois admises pour les opérations algébriques, on pourra écrire $\mathbf{a} = p\mathbf{b}^{-1}$, $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1}p$ et donner une interprétation du résultat. Il est géométriquement évident que le « bivecteur », le « produit vectoriel » appelé « extérieur » et le « produit scalaire » ou « intérieur » ne sont pas des produits dans le sens analytique complet. Les analystes qui considèrent l'une de ces trois notions comme produit fondamental, font une restriction dès le début, ils limitent ainsi arbitrairement le procédé même dont ils veulent faire usage.

Il peut sembler, à première vue, que l'omission du produit complet, le vrai produit aie peu d'importance puisqu'on peut, en considérant les applications simples, faire un grand nombre d'opérations en se limitant aux fonctions qui se rencontrent très fréquemment $V\mathbf{ab}$, $S\mathbf{ab}$, $V\mathbf{a}V\mathbf{bc}$, etc., dans lesquelles les vecteurs ne sont que par groupes de deux. Mais à mesure que nous avançons vers des applications plus compliquées, nous sommes amenés à considérer des combinaisons de plus en plus complexes. De tels développements sont possibles et ne le sont que si nous admettons dès le début le produit complet de deux ou plusieurs vecteurs ainsi que la loi associative. Mais si nous limitons arbitrairement nos procédés et nos opérations comme le font MM. Burali-Forti et Marcolongo et bien d'autres, l'expérience nous prouve qu'il faut introduire de nouvelles fonctions et de nouveaux opérateurs par des définitions indépendantes.

Considérons par exemple l'opérateur différentiel vectoriel ∇. Toute sa puissance ne peut être complètement développée dans un système d'analyse vectorielle qui ne tient pas compte de la notion de produit complet de deux ou plusieurs vecteurs. MM. Burali-Forti et Marcolongo le reconnaissent lorsqu'ils disent : « Le symbole ∇ qui est bien approprié aux quaternions n'est pas applicable dans le système minimum », c'est-à-dire nullement *leur* système minimum. Mais il faut introduire les notions géométriques et physiques importantes qui y sont rattachées ; d'où la nécessité de l'introduction par des *définitions* de trois nouvelles fonctions *grad*, *rot*, *div*, et d'une discussion compliquée de leurs rapports et propriétés. Dans le système d'Hamilton, ces propriétés sont la conséquence naturelle du fait que ∇ est un opérateur vectoriel se comportant exactement comme un vecteur. Dans bien des cas ce sont de pures identités obtenues par les transformations les plus simples.

Une fois que l'existence du produit complet de vecteurs est admise, il est évidemment possible de multiplier la différentielle d'un vecteur par un autre vecteur. Si nous utilisons la forme trinôme de ∇, c'est-à-dire $i_1 d_1 + i_2 d_2 + i_3 d_3$ où d_1 d_2 d_3 sont des différentielles dans l'espace prises suivant les vecteurs unités perpendiculaires i_1 i_2 i_3, il est facile de comprendre l'effet de ∇ sur une fonction scalaire. C'est le gradient ou *grad*. Mais ∇ est un opérateur *vectoriel* et doit avoir une action sur un vecteur. Dans la forme développée

$$\nabla \mathbf{u} = i_1 d_1 \mathbf{u} + i_2 d_2 \mathbf{u} + i_3 d_3 \mathbf{u}$$

chaque terme est le produit de deux vecteurs et *n'introduit rien de nouveau dans l'analyse vectorielle complète.*

Nous pouvons également considérer la notation de Tait, qui définit ∇ par l'équation $du = -Sd\varrho\nabla . u$, où du est la variation de u amenée par la variation de ϱ, variable vectorielle dont u est une fonction scalaire. Multipliant par un vecteur unité quelconque et formant trois expressions semblables, nous obtenons par addition l'équation correspondante pour une fonction vectorielle $d\sigma = - Sd\varrho\nabla . \sigma$. L'interprétation complète de ∇ se déduira facilement de ces équations. *Aucune définition supplémentaire n'est néces-*

saire; tout se déduit naturellement des principes fixes du calcul. L'opérateur ∇ entre dans les expressions, analytiquement, comme un vecteur, sa partie différentielle scalaire agissant sur la quantité variable *in situ,* que cette quantité soit scalaire ou vectorielle. ∇u, $V\nabla\sigma$, $S\nabla\sigma$, notations concises, parfaites, pour grad, rot, div, s'en déduisent immédiatement ainsi que leur interprétation. *Elles n'ont pas besoin d'être définies.* La loi associative nous permet d'écrire ∇^2 pour $\nabla\nabla\sigma$ lorsqu'on opère sur un vecteur aussi bien que sur une fonction scalaire; et ∇^2 est un opérateur scalaire, parce que le carré d'un vecteur est une quantité scalaire. Voir les transformations pour $\nabla^2 u$ et $\nabla^2\mathbf{u}$ données ci-dessus.

Les formes généralisées *grad-rot-div* équivalentes à Δ et Δ' que MM. Burali-Forti et Marcolongo présentent comme fondamentales, sont des formes plus compliquées pour exprimer ∇^2, à propos duquel ils disent: « Il n'est pas permis d'indiquer avec un même symbole (c'est-à-dire ∇^2) deux fonctions qui diffèrent non seulement par le champ d'application, mais aussi par leurs propriétés. » Cependant ∇^2 n'est ni plus ni moins que l'opérateur de Laplace changé de signe. Si nous prenons le vecteur

$$\mathbf{u} = i_1 u_1 + i_2 u_2 + i_3 u_3 ,$$

où $u_1\, u_2\, u_3$ sont les composantes de $\mathbf{u}$ et que nous lui appliquons ∇^2, nous aurons immédiatement

$$\nabla^2\mathbf{u} = i_1\nabla^2 u_1 + i_2\nabla^2 u_2 + i_3\nabla^2 u_3 .$$

Dire que l'opérateur de gauche diffère par ses propriétés des opérateurs de droite est un non sens ; nous pourrions tout aussi bien dire que dans la différentielle ordinaire

$$d\mathbf{u} = i_1 du_1 + i_2 du_2 + i_3 du_3 ,$$

le d de gauche a des propriétés différentes des d de droite. Les divers *résultats* obtenus sont dûs non à l'opérateur, mais aux quantités sur lesquelles on opère. De même que d agit conformément à ses lois scalaires, que la quantité sur laquelle il opère soit scalaire ou vectorielle; de même ∇ agit conformément à ses propres lois vectorielles quelque soit le caractère de la quantité sur laquelle il opère.

Comme exemple probant de la concision et de la simplicité de l'emploi de ∇ dans le calcul d'Hamilton, nous pouvons prendre la transformation de $\nabla^2 V\sigma\tau$ où σ et τ sont 2 fonctions vectorielles du vecteur ρ, par rapport auxquelles ∇ est l'opération du différentiel vectoriel

$$\begin{aligned}
\nabla^2 V\sigma\tau &= \nabla(\nabla_1 V\sigma_1\tau + \nabla_2 V\sigma\tau_2) ,\\
&= \nabla_1{}^2 V\sigma_1\tau + \nabla_2\nabla_1 V\sigma_1\tau_2 + \nabla_1\nabla_2 V\sigma_1\tau_2 + \nabla_2{}^2 V\sigma\tau_2 ,\\
&= -V\tau\nabla^2\sigma + 2S\nabla_1\nabla_2 . V\sigma_1\tau_2 + V\sigma\nabla^2\tau .
\end{aligned}$$

Dans ces expressions, l'indice indique sur quel vecteur l'opérateur agit momentanément. Le terme du milieu, à droite, est susceptible de bien des transformations et peut facilement être mis sous la forme semi-cartésienne

$$2V \left\{ (Si_1\nabla)\sigma(Si_1\nabla)\tau + \quad \text{etc.} \right\}.$$

Comparons les formules (8) et (8') de la page 62 de l'*Omografie Vettoriali.* Nous y trouvons également d'autres résultats qui, étant de simples identités lorsque le vrai ∇ est convenablement utilisé, ne nécessitent aucune démonstration.

Je crois que la confusion actuelle de pensée et de notation est due, en partie, à un usage impropre des termes : *Produit vectoriel, Produit scalaire, Produit interne,* etc. ; car ces fonctions ne sont pas des produits dans le sens analytique complet du terme. Hamilton appelait $V\alpha\beta$ la partie vectorielle du produit $\alpha\beta$ et il l'écrivait tel qu'il la concevait. Sa notation est, en fait, une notation abrégée du même genre que sin θ, tang θ, log x, cos θ, etc. ; et l'expérience prouve que les notations naissant spontanément d'une méthode sont parmi les meilleures. Le principe à la base de notre notation mathématique est la contraction de mots et de phrases — f et F pour fonction, d pour différentielle, Σ, $\int$ pour sommation (intégration), et ainsi de suite. Un des grands mérites de la notation d'Hamilton est sa formation systématique suivant un plan unique simple. Le ∇ lui-même, qui est simplement Δ retourné pour le distinguer du Δ des différences finies, est une forme correcte pour le symbole de différentiation vectorielle d'une méthode de calcul qui emploie systématiquement les lettres grecques pour désigner les vecteurs. De même Φ, qui est le F grec, est un symbole plus approprié pour représenter une fonction vectorielle, que le α par lequel les analystes italiens le remplacent.

Dans le système d'analyse vectorielle présenté par MM. Burali-Forti et Marcolongo, je ne trouve pas la même unité de méthode. Leurs notations sont d'origines diverses et dans bien des cas manquent de force d'expression. Les auteurs excluent arbitrairement la conception de produit complet de 2 vecteurs et se privent ainsi de l'usage du symbole de différentiation vectorielle dans l'espace. Ils comblent partiellement cette lacune par l'introduction ingénieuse d'au moins cinq opérateurs fonctionnels, grad, rot, div, $\frac{du}{dP}$, $\frac{d\mathbf{u}}{dP}$, opérateurs dont la forme n'indique en aucune façon la relation étroite qui les lie.

Les trois premiers sont sans doute formés d'après les principes de la notation d'Hamilton, mais avec ∇, V, S déjà en usage ils sont superflus. De même l'*Omografie* avec α, $V\alpha$, $I_1(\alpha)$, $I_2(\alpha)$, $I_3(\alpha)$, est identique à la fonction linéaire vectorielle d'Hamilton et à ses invariants vectoriels et scalaires. En réalité, la prétention qu'un tel système est un système minimum dans un sens acceptable quelconque du mot n'est pas soutenable. Il n'y a aucune preuve que l'on puisse faire plus avec ce système qu'avec celui d'Hamilton et ce dernier est visiblement plus systématique dans ses notations, plus sobre dans son symbolisme et plus maniable dans ses opérations.

Hamilton appelait son système *Quaternions;* un grand nombre de mathématiciens entraînés par la conception d'un quaternion comme d'un nombre complexe de 4 termes unitaires ont protesté contre sa présence dans l'analyse vectorielle. Je ne connais aucune analyse vectorielle pratique qui n'utilise les relations hamiltoniennes

$$ij = k = -ji\ , \quad jk = i = -kj\ , \quad ki = j = -ik$$

avec 3 vecteurs unitaires perpendiculaires et qui ne fasse du carré d'un vecteur une quantité scalaire. Le produit effectué de 2 vecteurs $ai + bj + ck$, $ei + fj + gk$, donne une quantité comprenant 4 termes unitaires.

Un système qui admet la notion du produit de 2 vecteurs perpendiculaires, mais nie la possibilité du produit de 2 vecteurs non perpendiculaires, est illogique à la base et n'a aucun droit au nom de rationnel.

10. — *Opinion de* M. Alex. Macfarlane[1] (Chatham, Canada).

Mon opinion personnelle est que les propositions de MM. Burali-Forti et Marcolongo ne paraissent pas devoir contribuer beaucoup à la solution du problème de l'unification des notations ; de plus, ces propositions, si peu nombreuses soient-elles, contiennent plusieurs points défectueux, tels que l'introduction d'un nouveau symbole $\wedge$. Pourquoi augmenter encore l'anarchie existant déjà dans les notations au lieu de les diminuer. Si l'idée de généralisation était toujours présente à l'esprit, le raisonnement permettrait de se servir, dans un sens généralisé, des symboles qui existent en Analyse. Lorsque de tels symboles existent, l'introduction d'un symbole complètement nouveau est une entrave plutôt qu'une aide.

A mon avis, il faut obtenir l'unification ou la conciliation des principes des quaternions avec l'analyse vectorielle avant de pouvoir fixer la notation. Ceux-ci sont à la base du calcul géométrique qui est plus spécialement étudié par l'étudiant praticien.

---

[1] Voir le rapport présidentiel annuel de l'*International Association for Promoting the Study of Quaternions and allied Systems of Mathematics*, juin 1909, p. 13-14.

Pour lui, il faut avoir une méthode uniforme qui soit en accord parfait avec l'analyse scalaire à laquelle il est déjà accoutumé et qui renferme toutes les armes puissantes composant l'arsenal des quaternions et de l'analyse vectorielle. Il me semble donc que le premier pas doit être unification logique des quaternions et de l'analyse vectorielle entre eux et avec l'analyse scalaire.

Profitons de l'expérience de nos amis les électriciens. Ils ont discuté les principes et les définitions de leur science, puis ils ont fixé toutes les définitions dans une série de congrès; mais malheureusement, même pour leur science si fouillée, ils se sont trop pressés, comme Heaviside l'a montré, le système des unités électriques et magnétiques ne repose pas sur une base parfaitement rationnelle, d'où il s'en suit que les équations de cette science sont embarrassées par l'introduction, d'apparence arbitraire, du symbole Π. La circonspection et la discussion ne sont-elles pas bien plus nécessaires pour un sujet aussi vaste et aussi nouveau que celui du calcul géométrique?

11. — *Réponse de* MM. Burali-Forti *et* Marcolongo *à MM. Carvallo (Paris), Cargill-G. Knott (Edimbourg) et A. Macfarlane (Chatham).*

I. — Réponse a M. Carvallo[1].

Le changement de sujet n'implique pas le changement des notations, car les vecteurs et leurs opérations ne changent pas la nature et l'algorithme avec le changement de sujet. (Voir la réponse à M. Wilson.)

« Si une loi inéluctable m'imposait une notation, j'adopterais celle de Grassmann, parce que cet auteur me parait avoir compris le premier toute l'étendue du domaine de son calcul. » Voir notre Note V « Per l'unificatione delle notazioni vettoriali », fin du § X et le § XI, où nous proclamions la nécessité d'adopter le système complet de Grassmann.

« Je ne suis donc pas partisan d'un système minimum qu'il faut abandonner quand on s'élève dans la généralité. » Voir notre Note V, § XI, n. 36, où les formations géométriques de Grassmann sont **déduites**, par abstraction, au moyen du système minimum.

Pour saisir d'une manière complète nos propositions, il est indispensable d'examiner non seulement le tableau de notations placé à la fin de notre Note IV et reproduit par l'*Ens. math.*, mais aussi les Notes elles-mêmes publiées dans les *Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*.

[1] Voir l'*Ens. math.*, XI[e] année, n° 5, p. 381, 1909.

II. — Sur les remarques de M. G. Knott.

« Les vecteurs et scalaires sont théoriquement communs à tous ; mais le vecteur d'Hamilton a une signification plus étendue ». Nous avons adopté, moins la forme, la définition de vecteur que Hamilton même donne dans le Livre I ; néanmoins, selon M. Knott, nous avons donné au vecteur une signification moins étendue que celle d'Hamilton ?! Mais M. Knott continue : « ...comprenant le *quadrantal versor*, parce que les *quadrantal versors* se composent, suivant la loi du parallélogramme qui est la loi fondamentale distinguant les vecteurs des autres quantités orientées ou non orientées. » Les forces appliquées à un point, par exemple, se composent ainsi suivant la loi du parallélogramme : alors, par l'argumentation de M. Knott, on déduit que les vecteurs comprennent aussi les forces. M. Knott a-t-il quelque autre entité à identifier aux vecteurs ! Les bivecteurs de Grassmann, par exemple !

M. Knott trouve que la distinction entre les « symboles d'opération » et les « symboles de fonctions » est *purement artificielle*. Malheureusement cette distinction est si répandue chez les mathématiciens que nous ne pouvons pas personnellement la sacrifier en hommage aux remarques de M. Knott. Mais nous pouvons bien lui faire une concession. Nous voulons *utiliser* « le symbole d'opération $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ » (en réalité le symbole d'opération est simplement $\wedge$) en proposant d'écrire

$$\frac{\operatorname{mod}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})}{\operatorname{mod} \mathbf{a} \,.\, \operatorname{mod} \mathbf{b}}$$

au lieu de $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Prendra-t-on en considération notre proposition ?!

Nous aussi nous avons remarqué[1] que i et $e^{i\varphi}$ sont des versors de Hamilton ; M. Knott veut bien nous le rappeler. « Ces expressions n'ont aucune relation logique avec la méthode des analystes italiens et leur introduction est une confession implicite de faiblesse inhérente à leur système. » Ceci est simplement étonnant ! Nous déduisons i et $e^{i\varphi}$ par notre système et les fils de celui-ci n'ont plus rien de commun avec leur père ! fils ingrats ! Notre système peut donner i et $e^{i\varphi}$ et il est faible, impuissant ?! M. Knott semble ne pas connaître la grande différence qui passe entre *l'algorithme général des quaternions* et celui des *quaternions coaxiaux !*

La correspondance entre nos symboles $\times$, $\wedge$, grad, rot, div, Δ, Δ', et les symboles S, V, ∇ de Hamilton nous est bien connue.

[1] *Per l'unificatione delle notazioni vettoriali* (*Rendiconti Circolo Matem. di Palermo*, T. XXIII-XXVI, Note I-V), Note III, § V.

De plus, nous avons donné cette correspondance en faisant usage des symboles I, I^{-1} de Hamilton[1], car on obtient ainsi des notations avec lesquelles des équivoques ou des déductions incorrectes ne sont pas possibles. M. Knott est-il bien certain que la correspondance pour nos symboles α *(omografia)* grad α soit celle qu'il affirme? La réduction avec les symboles I et I^{-1} sera très instructive pour M. Knott[2].

« Toutes ces complications (?!) de grad, rot et div proviennent de ce que bien des auteurs d'analyse vectorielle négligent le produit complet des vecteurs. C'est ce fait que je me propose d'examiner avec quelques détails. » Nous avons déjà exposé[3] tout ce qu'il est nécessaire pour reconnaître que l'examen de M. Knott est loin d'être concluant, car il se réfère à des vecteurs qui ne sont pas les *vrais* vecteurs de Hamilton. Mais la question est, en général, de telle importance que nous croyons nécessaire de répéter quelques-unes des considérations déjà faites.

Dans le Livre I, Hamilton considère le vecteur *non* « comme symbole d'une quantité susceptible des opérations généralisées de multiplication et de division », mais comme une entité géométrique B — A, D — C, ... telle que

$$B - A = D - C$$

seulement dans le cas que (moins la forme)

$$\frac{B+C}{2} = \frac{A+D}{2};$$

c'est-à-dire *comme une entité géométrique caractérisée par* GRANDEUR *et* DIRECTION (*et* SENS).

---

[1] *Per l'unificazione.....*, Note III, n^{os} 15, 16, 17.

[2] La terne orthogonale-destrogira des vecteurs **i**, **j**, **k** soit fixée une fois pour toutes. Les vecteurs **u**, **v**, **w** étant donnés, l'homographie générale α telle que, quel que soit le vecteur **x**,

$$(1) \qquad \alpha\mathbf{x} = (\mathbf{u} \times \mathbf{x})\mathbf{i} + (\mathbf{v} \times \mathbf{x})\mathbf{j} + (\mathbf{w} \times \mathbf{x})\mathbf{k}$$

est déterminée. Réciproquement, α étant donné, les vecteurs **u**, **v**, **w** qui paraissent dans (1) sont déterminés, car

$$\mathbf{u} = K\alpha\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = K\alpha\mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = K\alpha\mathbf{k}.$$

Donc, par l'*intermédiaire* de **i**, **j**, **k** on peut établir une *correspondance univoque et réciproque* parmi « les homographies générales α » et **u**, **v**, **w**. En variant **i**, **j**, **k**, cette correspondance varie. Par conséquent *une homographie générale α n'est pas une fonction des trois vecteurs* **u**, **v**, **w**; mais elle est fonction d'une terne fixe **i**, **j**, **k** et d'une autre terne variable **u**, **v**, **w**. C'est-à-dire la (1) donne bien *toutes* les homographies, mais *liées invariablement à une terne fixe* **i**, **j**, **k**; en d'autres termes, (1) donne les homographies comme des tachigraphes. Ce fait est fondamental pour établir la correspondance entre la fonction ϕ de Hamilton et nos homographies.

Nous avons obtenu (*Omografie vettoriali*, n^{os} 6, 10) des homographies fonction d'un seul vecteur **u** ou des deux vecteurs **u**, **v**; les homographies $\mathbf{u}\wedge$, H(**u**, **v**). Par ces homographies on peut obtenir des homographies fonctions des trois vecteurs **u**, **v**, **w** mais non toutes les homographies.

[3] *Per l'unificazione.....*, Note III. — BURALI-FORTI, *I quaternioni di Hamilton e il calcolo vettoriale* (*Atti Acc. Torino*, 1908).

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ étant des vecteurs ($\mathbf{u} \neq 0$), Hamilton représente avec les symboles composés

$$\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{vu}$$

des *opérateurs vectoriels qui, appliqués* (à gauche) *aux vecteurs d'une certaine classe* (non à tous les vecteurs), *donnent un vecteur bien déterminé*. Par exemple : $\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u}}$ est l'opérateur tel que, $\mathbf{x}$ étant un vecteur COPLANAIRE AVEC $\mathbf{u}$ ET $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u}}\mathbf{x}$$

est *le* vecteur qui, avec $\mathbf{x}$, forme un triangle directement semblable au triangle formé avec $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}$. Voilà le point de départ choisi par Hamilton pour définir les quaternions comme opérateurs vectoriels de la forme symbolique

$$\frac{\text{vecteur}}{\text{vecteur non nul}} \cdot$$

De la définition d'Hamilton il s'ensuit que : si α est un quaternion, α est un opérateur pour les vecteurs $\mathbf{x}$ perpendiculaires au vecteur de α (indiqué par $V\alpha$) et *seulement* pour ces vecteurs. On a, en employant nos symboles $\times$ $\wedge$

$$\alpha\mathbf{x} = (S\alpha)\mathbf{x} + (V\alpha)\wedge\mathbf{x}$$

$$S(\mathbf{vu}) = -\mathbf{v}\times\mathbf{u}\ , \qquad V(\mathbf{vu}) = \mathbf{v}\wedge\mathbf{u}$$

$$S\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2}\ , \qquad V\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u}} = -\frac{\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2}\ .$$

Avec une précision admirable, Hamilton développe plusieurs propriétés de l'algorithme quaternionnel, et c'est en hommage à la précision des *concepts* et des *notations* que Hamilton trouve nécessaire d'introduire les opérateurs I, I^{-1}.

Il applique (à gauche) le premier à un *quaternion droit* α (ou quadrantal versor) pour obtenir le vecteur $\mathbf{u}$ de α. Il applique I^{-1} à un vecteur $\mathbf{u}$ pour obtenir le quaternion droit dont le vecteur est $\mathbf{u}$. Les deux conditions

$$I\alpha = \mathbf{u}\ , \qquad I^{-1}\mathbf{u} = \alpha$$

ont la même signification.

Il résulte que

$$(I^{-1}\mathbf{v})(I^{-1}\mathbf{u}) = \mathbf{vu}\ , \qquad \frac{I^{-1}\mathbf{v}}{I^{-1}\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u}}\ ;$$

c'est-à-dire que les symboles $\mathbf{vu}$, $\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u}}$ employés *pour mettre en évidence les deux vecteurs qui* DÉTERMINENT *l'opérateur*, coïncident avec les quaternions $(\mathrm{I}^{-1}\mathbf{v})\,(\mathrm{I}^{-1}\mathbf{u})$, $\frac{\mathrm{I}^{-1}\mathbf{v}}{\mathrm{I}^{-1}\mathbf{u}}$.

A ces faits-ci est due la « symbolical identification » hamiltonienne de $\mathrm{I}\alpha$ et $\mathrm{I}^{-1}\mathbf{u}$ à α et $\mathbf{u}$; c'est-à-dire l'*identification* SYMBOLIQUE *des vecteurs aux quaternions droits.* Mais il y a un abîme entre « identification symbolique » et « identification absolue ». On peut identifier deux symboles différents pour *abréger l'écriture;* cela peut conduire à des erreurs, mais ce n'est point une erreur logique. Au contraire, l'identification absolue de deux entités différentes est une faute logique que rien ne peut justifier.

Hamilton répète toujours le mot « symbolical identification » qui semble dire « prenez garde ». Précaution inutile ! Les vulgarisateurs de la magistrale œuvre de Hamilton, à la « suppression symbolique » de I et I^{-1}, ont substitué la « suppression absolue » des opérateurs I, I^{-1} ; à la « symbolical identification » des vecteurs aux quaternions droits ont remplacé leur « identification absolue ».

Les vulgarisateurs de Hamilton (et c'est à eux seulement qu'est due la confusion actuelle) ont montré bien peu de déférence à leur maître, avec la suppression absolue, des symboles I, I^{-1} ! Ne point les comprendre n'est pas une raison suffisante pour les supprimer[1].

Revenons aux remarques de M. Knott.

« Ayant défini le vecteur comme une quantité satisfaisant à la loi du parallélogramme, l'analyste doit examiner la signification qu'il faut attacher à un produit ou à un quotient de vecteurs. Cette signification doit être obtenue par le moyen géométrique le plus simple, tenant compte de l'interprétation analytique des procédés généralisés de multiplication et de division. » *Les vecteurs, les bivecteurs* de Grassmann, les *forces* appliquées à un même point, les *quaternions droits,* ont en commun la *loi du parallélogramme.* Les analystes qui définissent un vecteur comme une quantité satisfaisant à la loi du parallélogramme se trompent. Leur faute est démontrée par Hamilton qui donne une exacte et simple définition de vecteur sans avoir recours à la loi du parallélogramme. De même Grassmann n'a point recours à cette loi pour introduire les vecteurs. L'analyste, qui n'aspire point au titre d'*algébriste,* doit examiner quelles sont les opérations *géométriques* qui se rattachent aux vecteurs et suivre l'algorithme algébrique tant qu'il lui est possible *sans détruire la géométrie.* Grassmann a bien renoncé à la division, car les entités géomé-

[1] Voir pour d'autres éclaircissements *I quaternioni di Hamilton...*

triques introduites par lui n'admettent pas la division; au contraire, il a fait un usage magistral du produit, bien que, pour M. Knott, le produit de Grassmann ne soit pas la multiplication (et le produit quaternionnel est-il une multiplication ?!). Hamilton préfère la notation $\beta\alpha^{-1}$ (multiplication) à la notation $\frac{\beta}{\alpha}$ (division) qui présente une ambiguïté[1]; avec les notations $\mathbf{vu}, \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u}}$, il indique, au commencement, non des produits des vecteurs, mais des opérateurs qui sont fonctions de la couple $\mathbf{u}, \mathbf{v}$; ces opérateurs ont la signification absolue des produits et des quotients quaternionnels $(\mathrm{I}^{-1}\mathbf{v})\,(\mathrm{I}^{-1}\mathbf{u}), \frac{\mathrm{I}^{-1}\mathbf{v}}{\mathrm{I}^{-1}\mathbf{u}}$, pour se représenter sous la forme $\mathbf{vu}$, $\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u}}$, depuis la « symbolical identification ».

M. Knott veut bien nous rappeler quelle est la puissance du symbole ∇. Il n'y a là rien de nouveau pour nous. Notre formule[2]

$$\nabla q = -\operatorname{div}(\mathrm{V}q) + \mathrm{I}^{-1}\left\{\operatorname{rot}(\mathrm{V}q) + \operatorname{grad}(\mathrm{S}q)\right\},$$

ou bien

$$\nabla = -\operatorname{div}\mathrm{V} + \mathrm{I}^{-1}\left\{\operatorname{rot}\mathrm{V} + \operatorname{grad}\mathrm{S}\right\},$$

qui peut être choisie pour donner une *définition absolue* de ∇ en opposition à la *définition ordinaire tachygraphique*

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} = k\frac{\partial}{\partial z},$$

dit bien que ∇ peut donner grad, div, rot, c'est-à-dire *peut donner toutes les fonctions qu'il contient.* Qu'y a-t-il là de merveilleux? M. Knott peut accomplir une chose bien merveilleuse en *démontrant* (mais — bien entendu — en faisant usage de la notation complète de Hamilton, avec I et I^{-1}) comment les quaternions, qui ne sont pas des homographies dans l'espace[3] et qui ont 4 dimensions, peuvent donner les homographies, dans l'espace, à 9 dimensions et leurs dérivées à 27 dimensions; comment ∇ peut donner une entité qu'il ne contient pas, c'est-à-dire le gradient d'une homographie; comment on peut définir ∇ de manière absolue sans avoir recours aux fonctions grad, div, rot; etc.

---

[1] Pour les entités a, b, c,... soit défini la multiplication. On peut définir la division comme *opération à résultat unique* dans le *seul* cas où

(1) $$ab = ba$$

(2) de $ac = bc$ et $c \neq 0$ on tire $a = b$,

conditions qui ne sont pas satisfaisantes pour les formations de Grassmann ((1) et (2)) et pour les quaternions ((1)).

[2] *Per l'unificazione.....*, Note III, n° 17, formules (7) (7').

[3] *I quaternioni di Hamilton.....*

« Je crois que la confusion actuelle de pensée et de notation est due principalement à un usage impropre des termes : Produit vectoriel, produit scalaire, produit interne, etc. ; car ces fonctions ne sont pas des produits dans le sens analytique complet du terme. » La confusion existe pour les algébristes, mais non pour les analystes qui posent l'analyse au service de la géométrie, de la mécanique et de la physique. Nous, nous comptons, avec bien d'autres, au nombre des admirateurs de Möbius, Hamilton, Grassmann. Et nous ne voulons point oublier Gibbs auquel nous devons notre système minimum. Les algébristes, les vrais pères de tous les systèmes *hermaphrodites,* sont des inconnus pour nous.

« Les auteurs excluent arbitrairement la conception de produit complet de deux vecteurs et se privent ainsi de l'usage du symbole de différentiation vectorielle dans l'espace. Ils comblent partiellement cette lacune par l'introduction ingénieuse d'au moins cinq opérateurs fonctionnels, grad, rot, div, $\frac{du}{d\mathrm{P}}$, $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$, opérateurs dont la forme n'indique en aucune façon la relation étroite qui les lie. » Nous ne faisons pas usage d'un opérateur à 4 dimensions, car il nous faut des opérateurs à 9 dimensions. Nous n'introduisons pas 5 opérateurs fonctionnels grad, rot, div, $\frac{du}{d\mathrm{P}}$ $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$, mais un seul opérateur $\frac{d}{d\mathrm{P}}$, défini en forme *absolue,* et duquel les autres sont des fonctions.

« Il n'y a aucune preuve que l'on puisse faire plus avec ce système qu'avec celui d'Hamilton, et ce dernier est visiblement plus systématique dans ses notations, plus sobre dans son symbolisme et plus maniable dans ses opérations. » M. Knott a le devoir de donner la preuve de son assertion. Peut-il, sans avoir recours aux coordonnées x, y, z du point P, développer tout ce qui est contenu dans notre *Omografie,* pp. 67-97 ? Avec les quaternions peut-il donner la rotation à un vecteur au moyen *d'un seul* opérateur linéaire ? Peut-il aborder avec M. Boggio [1], et sans coordonnées, les problèmes les plus élémentaires sur les liquides visqueux ? Saurait-il donner, sans avoir recours aux coordonnées, tout au moins, la partie fondamentale de la géométrie différentielle d'une surface, et de la géométrie différentielle des complexes et des congruences [2] ? Etc., etc.

---

1 *Sul moto stazionario lento di una sfera in un liquido viscoso.* (*Rendiconti di Palermo,* 1910.)
Sul problema del moto stazionario lente di un liquido viscoso. (*Rendieonti Acc. Lincei,* 1910.)

2 C. Burali-Forti : *Alcune nuove espressioni assolute delle curvature in un punto di una superficie. — Una dimostrazione assoluta del teorema di Gauss relativo all'invariabilità della curvatura totale nella flessione.* (*Rendiconti Acc. Lincei,* 1909.)
Sulla geometria differenziale assoluta delle congruenze e dei complessi rettilinei. (*Atti Acc. Torino,* 1909.)
Omografie vettoriali. Appendice, § 4.

« Un système qui admet la notion du produit de deux vecteurs perpendiculaires, mais nie la possibilité du produit de deux vecteurs non perpendiculaires, est illogique à la base, et n'a aucun droit au nom de rationnel. » Et cela parce que nous faisons usage des quaternions coaxiaux (nombres imaginaires) qui ont un calcul *identique* à celui de l'algèbre, et que nous n'employons pas, en général, de quaternions !

Lorsqu'on veut juger des travaux faits avec conscience, sinon avec science, il est nécessaire de connaître amplement dans leur *esprit* et dans leur *substance* TOUS les arguments analogues. Il n'est pas suffisant, par exemple, d'avoir étudié les *quaternions vulgarisés,* ou de les avoir étudiés dans l'original sans en avoir saisi tout l'esprit et la portée.

III. — RÉPONSE A M. A. MACFARLANE.

Dans notre système nous faisons usage des ENTITÉS et des OPÉRATIONS, *communes à tous,*

(1) nombre, point, vecteur ; $+$, $-$, produit par un nombre ,

et des OPÉRATIONS (*communes à tous,* sauf les symboles)

(2) $\times$ (produit interne, scalaire) , $\wedge$ produit vectoriel)

qui peuvent être définis avec les *seuls* éléments (1) sous forme *géométrique très élémentaire.* Nous avons aussi démontré qu'à l'aide de (1) et (2) *seulement* on peut obtenir : *les formes géométriques de Grassmann,* leurs *transformations linéaires* comprises (nécessaires et suffisantes pour traiter sous forme *absolue* toute question géométrique et mécanique) ; *les homographies vectorielles ; les quaternions* (insuffisants pour traiter sous forme *absolue* plusieurs questions) ; c'est-à-dire tous les calculs géométriques connus.

En suivant l'avis de M. Macfarlane, il faut joindre aux éléments (1)

(3) quaternions , leurs opérations, S , V , I , I^{-1}

(c'est-à-dire la théorie hamiltonienne presque complète) pour arriver aux (2) avec les formules (notation complète)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = - S(I^{-1}\mathbf{b}) \, . \, I^{-1}\mathbf{a}) \, , \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = V(I^{-1}\mathbf{a} \, . \, I^{-1}\mathbf{b}) \, .$$

Les opérations $\times$, $\wedge$ une fois obtenues, le calcul géométrique n'est pas complet (voir notre réponse à M. Knott).

Le point de départ (1) et (2) n'est-il pas plus simple que (1) et (3)? « *L'unification logique des quaternions et de l'analyse vectorielle entre eux et avec l'analyse scalaire* » n'est-elle pas accomplie, et fort simplement, avec (1) et (2)?

Faire des quaternions pour les quaternions est œuvre inutile. Hamilton, dont nous sommes des ardents admirateurs, a apporté à la science bien d'autres contributions que des opérateurs vectoriels. Ceux-ci, comme tous les produits du génie humain, sont susceptibles d'être transformés et perfectionnés.

C. Burali-Forti et R. Marcolongo.

CHRONIQUE

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

Le Comité central, composé de MM. Klein (Gœttingue), Greenhill (Londres) et Fehr (Genève), s'est réuni à *Bâle* le 28 décembre 1909. Il a tenu deux séances, l'une le matin de 9 h. à midi, l'autre l'après-midi de 4 à 8 h. Le Comité a tout d'abord pris connaissance du rapport sur l'organisation et l'état actuel des travaux dans les *dix-huit pays participants*. C'est avec une vive satisfaction qu'il a constaté que dans un grand nombre de pays les travaux sont en bonne voie et donneront lieu à d'intéressants rapports. Les renseignements recueillis feront l'objet d'une *Circulaire N° 2,* qui sera publiée dans le prochain numéro de l'*Enseignement mathématique.*

L'enquête se poursuit activement dans tous les pays avec la collaboration active et dévouée d'un grand nombre de mathématiciens. On peut prévoir, dès maintenant, que d'ici à la fin de cet hiver, toute une série de rapports préparatoires seront terminés.

Tandis que les délégués ont rencontré le meilleur accueil et beaucoup de bonne volonté chez les mathématiciens, il n'en a pas été partout de même dans leurs démarches auprès de leur Gouvernement. Dans plusieurs pays la question de l'appui financier n'est pas encore réglée. Les autorités scolaires ont cependant un intérêt évident à soutenir une œuvre aussi vaste qui ne manquera pas de contribuer au progrès de l'enseignement en général. Il faut donc espérer que, mis au courant des travaux en préparation,