Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 12 (1910)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA NOTION DE PUISSANCE EN MÉCANIQUE
Autor: Cotton, Emile
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12783

suffit de poser

$$\tau = \frac{u+v}{\sin\alpha\cos\alpha}\,.\,\psi = \frac{v}{\sin^2\alpha} - \frac{u}{\cos^2\alpha},$$

pour transformer l'équation générale en

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} = U\ ;$$

d'où résulte le théorème : *La détermination des surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies est réductible à l'équation des télégraphistes.*

E. Turrière (Toulouse).

SUR LA NOTION DE PUISSANCE EN MÉCANIQUE

Dans l'enseignement élémentaire de la mécanique, on se contente le plus souvent d'une définition trop rapide de la puissance. Il conviendrait cependant d'insister sur cette notion, d'une grande l'importance pratique. Les élèves entendent parler, dans la vie courante, de *chevaux* ou de *watts* plus souvent que de *kilogrammètres* ou *d'ergs*[1]; il est donc utile de leur apprendre à appliquer les formules de mécanique à l'évaluation des nombres correspondants.

Je vais montrer rapidement ici comment on peut définir avec soin la notion de puissance et la faire avantageusement intervenir à côté de celle de travail élémentaire soit en statique soit en dynamique. Un très léger changement des équations (dérivées figurant à la place de différentielles) amène leurs différents termes à se prêter immédiatement au

[1] L'emploi fréquent de l'*hectowatt-heure* ou du *cheval-an* comme unités pratiques d'énergie est assez significatif au point de vue de l'importance industrielle respective des mesures de puissance et de travail.

calcul numérique[1] et par cela même les rend plus intuitives pour ceux qui étudient la mécanique en vue de ses applications. Quelques propositions d'un caractère plus théorique sur le changement du trièdre de référence sont donnés, à titre d'exercice, à la fin de cet article; elles s'adressent à des lecteurs bien habitués aux principes généraux de la dynamique des systèmes.

1. — **Définitions et unités.** — Etant donné un travail E effectué pendant un certain temps T, la *puissance moyenne* correspondante est une grandeur proportionnelle au travail E et inversement proportionnelle au temps T. On peut dès lors parler du rapport des puissances moyennes correspondant à deux travaux E, E′ effectués respectivement en des temps T et T′, et, par suite, de la *mesure d'une puissance* moyenne rapport de cette puissance à une puissance type choisie comme unité.

Cette puissance (moyenne) unité correspond dans un *système absolu d'unités* à un travail unité effectué dans l'unité de temps; pour les deux systèmes absolus couramment employés, elle est le kilogrammètre par seconde ou l'erg par seconde.

La *pratique* a consacré d'autres unités : le *cheval vapeur* (75 kilogrammètres par seconde), le *poncelet* (100 kilogrammètres par seconde), le *watt* (10^7 ergs par seconde) ; le *kilowatt* (1000 watts) est sensiblement égal au poncelet $\left(\frac{1000}{981}\text{ poncelet}\right)$.

Avec des unités absolues, *le nombre qui mesure une puissance moyenne est égal au quotient du nombre qui mesure le travail par le nombre qui mesure le temps.* On passe aisément de ce cas à celui des unités pratiques. Bien entendu si les unités ne sont pas spécifiées, les formules de mécanique ne sont applicables qu'à des nombres correspondant à des unités absolues.

Considérons maintenant le travail effectué par un ensemble de forces agissant sur un système matériel en mouve-

[1] Il n'en est pas ainsi des équations où figure le travail élémentaire, à moins de faire une confusion fâcheuse entre très petit et infiniment petit.

ment pendant l'intervalle de temps séparant les instants t et $t+h$. Lorsque h tend vers zéro, t restant fixe, la puissance moyenne correspondante tend en général vers une limite qu'on appelle la *puissance à l'instant* t correspondant à l'ensemble de forces et au mouvement considéré.

La puissance instantanée ainsi définie se mesure avec les mêmes unités que la puissance moyenne. L'une et l'autre peuvent être évaluées algébriquement comme les travaux auxquels elles correspondent.

2. — **Expressions diverses de la puissance instantanée.** — En pratique, pour arriver à l'expression de la puissance, il n'est pas nécessaire de passer par l'intermédiaire du travail; ainsi que le montrent les résultats suivants faciles à obtenir.

La puissance à l'instant t *d'une force agissant sur un point matériel en mouvement est égale au produit de la force par la vitesse du point à l'instant considéré et par le cosinus de l'angle des deux vecteurs représentatifs.*

Donc, si X, Y, Z et v_x, v_y, v_z sont les projections sur trois axes rectangulaires de la force et de la vitesse, la puissance a pour expression

$$p = Xv_x + Yv_y + Zv_z \,. \tag{1}$$

On observe que la puissance correspondant à la résultante de plusieurs forces est la somme des puissances correspondant à ces forces. En décomposant la vitesse en plusieurs composantes, on a une proposition analogue, utilisée plus loin.

Il est à remarquer que la méthode habituellement suivie pour obtenir le travail élémentaire d'un dyname agissant sur un solide fait intervenir la puissance instantanée; il suffit donc d'énoncer le résultat suivant :

La puissance à l'instant t *d'un dyname agissant sur un solide en mouvement est égale au moment de ce dyname et du torseur des rotations instantanées.*

Deux cas particuliers sont très importants en pratique, leur démonstration directe est d'ailleurs immédiate et accessible aux débutants.

Si le mouvement instantané est une translation, la puissance égale le produit algébrique de la vitesse de translation par la projection sur cette vitesse de la résultante de translation du dyname considéré.

S'il y a une *rotation tangente*, la puissance est égale au produit de la vitesse angulaire de rotation instantanée par le moment résultant, par rapport à l'axe de cette rotation, du dyname considéré.

Ces cas particuliers se prêtent à des *exercices numériques de caractère pratique*, avec changements d'unités, tels que les suivants :

Déterminer (en chevaux) la puissance correspondant au mouvement uniforme de translation d'un train, la vitesse étant connue (en kilomètres à l'heure) ainsi que la tension (en kilogrammes) des barres d'attelage reliant le train à la locomotive.

Connaissant (en tours par minute) la vitesse de rotation d'une roue de rayon donné (en mètres) et la puissance (en chevaux) produite par l'action d'une force agissant tangentiellement sur cette roue (pression des dents d'un engrenage, différence des tensions des brins d'une courroie, frottement en un point de la roue, etc...) évaluer cette force (en kilogrammes).

3. — **Principes des vitesses virtuelles et des forces vives.** — Nous relierons le second principe au premier en utilisant le principe d'Alembert.

Tout d'abord, on a les deux propositions suivantes :

1. — *Etant donné un système en équilibre, la somme des puissances virtuelles de toutes les forces pour un mouvement quelconque des points du système est nulle.*

2. — *Etant donné un système en équilibre, assujetti à des liaisons sans frottement, la somme des puissances virtuelles des forces données est nulle pour tout mouvement du système compatible avec les liaisons.*

On reconnaît là deux propositions classiques mais énoncées habituellement d'une façon un peu différente.

Nous allons les rapprocher du principe de d'Alembert; mais nous calculerons au préalable *la puissance des forces d'inertie* en supposant que les vitesses intervenant dans ce calcul sont les *vitesses réelles* des points du système. Alors l'expression (1) donne pour la puissance de la force d'inertie d'un point de masse m rapporté aux axes fixes $Oxyz$:

$$-m\left[\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right]$$

c'est-à-dire $-\frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2}$, v désignant la vitesse du point.

Une sommation étendue à tous les points du système montre que :

La puissance des forces d'inertie, pour le mouvement réel d'un système, est à chaque instant égale à la dérivée par rapport au temps changée de signe de la demi-force vive du système[1].

Les énoncés (1) et (2) du début de ce n° donnent alors les formes suivantes à deux propositions classiques :

1. — *La dérivée par rapport au temps de la demi-force vive d'un système égale la somme des puissances (au même instant) des forces agissant sur le système.*

2. — *Etant donné un système matériel assujetti à des liaisons sans frottement et indépendantes du temps, la dérivée par rapport au temps de la demi-force vive du système est égale à la somme des puissances des forces données agissant sur le système*[2].

L'application des théorèmes précédents, est, comme on sait, particulièrement importante dans la théorie des machines; c'est là précisément qu'il est naturel d'insister sur la notion de puissance. De plus, en rapprochant, comme nous venons de le faire, cette théorie du principe du travail virtuel, on met bien en évidence le fait que la théorie habituelle de l'équilibre des machines simples, utilisées pour la plupart à l'état de mouvement, n'est qu'une première approximation et on a le moyen d'estimer les erreurs qu'elle comporte.

4. — **Changement du système de comparaison.** — Dès qu'on

---

[1] En identifiant ainsi cette dérivée à une puissance, on rend tout à fait intuitive l'analogie entre force vive et travail.

[2] Les énoncés classiques du principe des forces vives appliqué à un intervalle de temps fini pourraient être transformés d'une façon analogue en faisant intervenir les puissances moyennes.

parle de mouvement (ou même de déplacement) il faut, pour être tout à fait précis, indiquer le système de comparaison. On omet le plus souvent de le faire quand on parle de puissance (ou de travail élémentaire) parce que, dans les énoncés précédents, les vitesses (ou les déplacements) correspondent au système invariable, appelé fixe ou absolu, par rapport auquel la résultante de toutes les forces appliquées à un point matériel est définie par le principe de l'inertie.

Il peut être avantageux cependant de considérer des systèmes intermédiaires de comparaison; voici quelques indications à ce sujet.

Appelons $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_1$ deux trièdres trirectangles mobiles l'un par rapport à l'autre, et envisageons à un même instant les puissances suivantes d'un même ensemble de forces appliquées à un système matériel S : P_1 correspondant aux vitesses des divers points de S par rapport à $\mathfrak{T}_1$ sera appelée la *puissance absolue*, P correspondant aux vitesses par rapport à $\mathfrak{T}$ sera appelée la *puissance relative*, P_e correspondant aux vitesses d'entraînement (le mouvement d'entraînement étant celui de $\mathfrak{T}$ par rapport à $\mathfrak{T}_1$) sera appelée *puissance d'entraînement*. On voit de suite que *la puissance absolue est la somme algébrique de la puissance relative et de la puissance d'entraînement.*

On observe que la distribution des vitesses d'entraînement étant la même que pour un solide en mouvement, *la puissance d'entraînement* P_e *s'obtient en prenant le moment du torseur des rotations instantanées dans le mouvement de* $\mathfrak{T}$ *par rapport à* $\mathfrak{T}_1$ *et du dyname constitué par l'ensemble de forces considéré.*

Dans les cas où il s'agit des forces intérieures, le dernier dyname constitué par des vecteurs deux à deux opposés est géométriquement équivalent à zéro, et P_e est nulle. On retrouve ainsi ce résultat connu et important que *pour la détermination de la puissance des forces intérieures, le choix du système par rapport auquel on prend les vitesses est indifférent.*

Proposons-nous maintenant de *rechercher les relations existant entre les équations qu'on peut obtenir en formant* *pour un même système matériel rapporté à deux trièdres de coordonnées mobiles l'un par rapport à l'autre, les combinaisons des forces vives.*

Soit $\mathfrak{T}_1$ le trièdre auquel est applicable le principe de l'inertie, $\mathfrak{T}$ un trièdre mobile par rapport à $\mathfrak{T}_1$; soit M un point matériel du système. Il y a équilibre entre l'ensemble des forces (ordinaires) absolues et la force d'inertie absolue du point M ; nous appelons ainsi celle qui correspond au mouvement de M par rapport à $\mathfrak{T}_1$. [On peut encore énoncer ceci en disant qu'il y a équilibre entre la force d'inertie relative (correspondant au mouvement de M par rapport à $\mathfrak{T}$) et l'ensemble des forces ordinaires relatives défini par l'adjonction à l'ensemble des forces ordinaires absolues de la force centrifuge et de la force centrifuge composée (qui correspondent au mouvement relatif de M (par rapport à $\mathfrak{T}$) et au mouvement d'entraînement de $\mathfrak{T}$ par rapport à $\mathfrak{T}_1$). Ainsi présenté, le principe du mouvement relatif ne modifie pas l'ensemble de toutes les forces appliquées à un point, il change simplement un qualificatif (ordinaire ou d'inertie) appliqué à quelques-unes d'entre elles.

Ceci posé, former *l'équation des forces vives pour le mouvement absolu* revient à appliquer l'énoncé 1 du n° 3 à l'ensemble des forces absolues ordinaires et d'inertie ; *la puissance absolue de cet ensemble est nulle.*

Mais on voit de même que la puissance relative de l'ensemble des forces ordinaires relatives et des forces d'inertie relatives est nulle ; on peut encore énoncer ceci en disant que *la puissance relative de l'ensemble des forces absolues, ordinaires et d'inertie, est nulle;* c'est un énoncé de l'équation des forces vives pour le mouvement relatif.

Décomposons la puissance absolue figurant dans le premier énoncé en puissance relative et puissance d'entraînement, nous voyons qu'on obtient ainsi l'équation du second énoncé à laquelle on aurait ajouté membre à membre une équation exprimant que *la puissance d'entraînement de l'ensemble des forces absolues, ordinaires et d'inertie, est nulle.*

Mais si l'on se reporte au début de ce n°, on voit que cette dernière puissance, moment d'un dyname et d'un torseur, peut être calculée en ne faisant intervenir que les coordonnées pluckériennes, par rapport à $\mathfrak{T}_1$ par exemple, de l'ensemble de toutes les forces absolues ordinaires et d'inertie. Ces six coordonnées pluckériennes sont nulles d'après les premiers théorèmes de la dynamique des systèmes (ceux où interviennent les quantités du mouvement).

En résumé, on arrive au résultat très simple que voici :

Les diverses équations qu'on peut obtenir en formant, pour un même système, la combinaison des forces vives appliquée aux équations du mouvement relatif par rapport à des axes quelconques ne diffèrent les unes des autres que par des combinaisons linéaires des six équations générales des quantités de mouvement projetées et des moments des quantités de mouvement.

EMILE COTTON (Grenoble).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

L'initiateur mathématique.

La psychologie infantile donne raison aux grands éducateurs d'autrefois qui préconisaient, pour la première enfance, un enseignement d'initiation reposant uniquement sur des expériences et sur des faits à la portée des jeunes cerveaux. L'abstraction viendra plus tard d'elle-même si le terrain est bien préparé. C'est pour réagir contre un enseignement purement abstrait, si néfaste au début des études mathématiques, que M. C.-A. LAISANT a rédigé son *Initiation mathématique,* où il montre comment on peut objectiver l'enseignement élémentaire. Cet ouvrage, qui est aujourd'hui à sa neuxième édition, est bien connu de nos lecteurs et il n'a pas tardé à exercer une heureuse influence dans l'enseignement élémentaire et secondaire.

C'est en s'inspirant de l'*Initiation mathématique* que M. J. CAMESCASSE a été amené à son ingénieux système d'assemblage de petits cubes qui constitue l'un des jeux les plus instructifs que l'on puisse mettre entre les mains des enfants. Ce jeu, qu'il ap-