Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1910)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'ÉQUATION DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR ET DE L'ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES

Autor: Turrière, E.

Kapitel: II

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12782

Comme application d'une autre nature, je citerai les formules de transformation à six constantes arbitraires données par M. Appell et qui laissent invariante l'équation du mouvement de la chaleur.

Laissant de côté ces applications de résultats relatifs à l'équation $r = q$, je choisirai parmi les solutions particulières connues

$$V = e^{a\psi + a^2 u}\,, \qquad V = \frac{1}{\sqrt{u}}\, e^{-\frac{\psi^2}{4u}}\,, \ldots,$$

la première de ces solutions : elle donne des résultats intéressants, relativement à des surfaces étudiées par M. Buhl, dans deux Mémoires insérés aux *Nouvelles Annales* de 1908 et de 1909 [1].

II

5. Je considère donc la solution

$$V = e^{a\psi + a^2 u}\,;$$

je poserai

$$a = \text{cotang}\ \alpha\,.$$

Les coordonnées cylindriques d'un point quelconque de la surface (S) correspondante sont pour cette solution particulière :

$$\rho = -\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\, e^{u}\, V\,, \quad \theta = \psi - \alpha\,, \quad z = \frac{V}{\sin^2\alpha}\,;$$

il résulte de ces expressions que l'équation de la surface (S), en coordonnées cylindriques, est de la forme

$$\Phi(z) = a\theta + F(\rho)$$

en posant

$$\Phi(z) = (1 + a^2)\log z + \text{const.}\,,$$

$$F(\rho) = a^2 \log \rho\,;$$

[1] Je dois cependant signaler qu'à la solution $V = \psi$, correspond l'*hélicoïde gauche* à plan directeur, $\varpi = \psi \sin \varphi$, pour lequel les asymptotiques sont les parallèles $\psi =$ const. et les méridiens $\psi =$ const.

on reconnaît là des surfaces spirales qui rentrent dans la catégorie de celles que M. Buhl a étudiées; en appliquant les résultats auxquels il a été conduit, on voit que les *deux familles d'asymptotiques se projettent sur* Oxz *suivant des spirales logarithmiques homothétiques :* ces surfaces appartiennent, par suite, et à un *double titre*, à la famille des surfaces dont *une* famille d'asymptotiques se projette sur Oxy suivant des spirales logarithmiques homothétiques, c'est-à-dire aux surfaces étudiées par M. Buhl dans son Mémoire de 1903, antérieurement cité.

Il est intéressant de se reporter aux trois Mémoires de M. Buhl, afin de comparer les résultats obtenus par les méthodes qu'il a indiquées avec ceux que je donne ici.

Je m'occuperai d'abord des asymptotiques qui sont des hélices et des lignes de plus grande pente : j'ai déjà signalé que ces courbes étaient les parallèles de la surface. Le long de l'une d'elles φ et u sont constants; on a donc

$$\rho = e^{a\theta} \times \text{const.} , \quad \frac{\rho}{z} = \text{const.} ;$$

ces relations expriment que les projections des asymptotiques sont des spirales logarithmiques homothétiques (α est précisément l'angle de la tangente et du rayon vecteur) et que ces asymptotiques sont tracées sur des cônes de révolution autour de Oz et de sommet O. D'où il résulte que ce sont des courbes bien connues sous le nom d'*hélices cylindro-coniques*.

En ce qui concerne la seconde famille d'asymptotiques des surfaces (S), l'équation à intégrer est

$$D d\varphi + 2D' d\psi = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial z}{\partial u} du + 2 \frac{\partial z}{\partial \psi} d\psi = 0 .$$

Je reviendrai prochainement sur cette équation [1]. Dans le

[1] J'étudierai plus généralement les équations différentielles du premier ordre qui peuvent être mises sous la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + m \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0 ,$$

z étant une fonction connue de x et de y, et m une constante quelconque. Je signalerai notamcas particulier actuel, elle donne

$$au + 2\psi = \text{const.},$$

d'où l'équation des projections

$$\rho = e^{-\frac{2+a^2}{a}\theta} \times \text{const.}$$

ce sont bien des spirales logarithmiques homothétiques. Les images sphériques de ces asymptotiques ne présentent rien de remarquable.

Le cas $a = \sqrt{2}.i$ correspond à l'une des surfaces de Bianchi : les projections des asymptotiques (de la seconde famille) sont des cercles concentriques. Cette surface est d'ailleurs imaginaire.

III

6. — Je terminerai ce Mémoire par une application nouvelle de l'*équation des télégraphistes :* c'est le nom donné par MM. Poincaré, Picard et Boussinesq, dans trois Communications à l'Académie, en 1893 et 1894, à l'équation

$$A\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2B\frac{\partial V}{\partial t} = C\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

qui représente la variation du potentiel V dans un fil ; les différents termes correspondent respectivement à la self-induction, à la résistance ohmique et à la capacité du fil. Par un choix convenable d'unités, l'unité de vitesse étant la vitesse de la lumière, on peut réduire les coefficients constants A, B, C à l'unité. Posant alors

$$V = U \,.\, e^{-t},$$

l'équation des télégraphistes prend la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U\,;$$

ment un cas d'intégration de l'équation différentielle qui correspond à une fonction z dépendant de deux fonctions arbitraires de x et de deux fonctions arbitraires de y, c'est-à-dire à une fonction z intégrale générale d'une certaine équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.