

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 12 (1910)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR DES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'ÉQUATION DU  
MOUVEMENT DE LA CHALEUR ET DE L'ÉQUATION DES  
TÉLÉGRAPHISTES

**Autor:** Turrière, E.  
**Kapitel:** II  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-12782>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Comme application d'une autre nature, je citerai les formules de transformation à six constantes arbitraires données par M. APPELL et qui laissent invariante l'équation du mouvement de la chaleur.

Laissant de côté ces applications de résultats relatifs à l'équation  $r = q$ , je choisirai parmi les solutions particulières connues

$$V = e^{a\psi + a^2u}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\psi^2}{4u}}, \dots,$$

la première de ces solutions : elle donne des résultats intéressants, relativement à des surfaces étudiées par M. BUHL, dans deux Mémoires insérés aux *Nouvelles Annales* de 1908 et de 1909<sup>1</sup>.

## II

5. Je considère donc la solution

$$V = e^{a\psi + a^2u};$$

je poserai

$$a = \cotang \alpha.$$

Les coordonnées cylindriques d'un point quelconque de la surface (S) correspondante sont pour cette solution particulière :

$$\varphi = -\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} e^u V, \quad \theta = \psi - \alpha, \quad z = \frac{V}{\sin^2 \alpha};$$

il résulte de ces expressions que l'équation de la surface (S), en coordonnées cylindriques, est de la forme

$$\Phi(z) = a\theta + F(\varphi)$$

en posant

$$\Phi(z) = (1 + a^2) \log z + \text{const.},$$

$$F(\varphi) = a^2 \log \varphi;$$

<sup>1</sup> Je dois cependant signaler qu'à la solution  $V = \psi$ , correspond l'hélicoïde gauche à plan directeur,  $\varphi = \psi \sin \alpha$ , pour lequel les asymptotiques sont les parallèles  $\psi = \text{const.}$  et les méridiens  $\psi = \text{const.}$

on reconnaît là des surfaces spirales qui rentrent dans la catégorie de celles que M. BUHL a étudiées; en appliquant les résultats auxquels il a été conduit, on voit que les *deux familles d'asymptotiques se projettent sur Oxz suivant des spirales logarithmiques homothétiques*: ces surfaces appartiennent, par suite, et à un *double titre*, à la famille des surfaces dont *une* famille d'asymptotiques se projette sur Oxy suivant des spirales logarithmiques homothétiques, c'est-à-dire aux surfaces étudiées par M. BUHL dans son Mémoire de 1903, antérieurement cité.

Il est intéressant de se reporter aux trois Mémoires de M. BUHL, afin de comparer les résultats obtenus par les méthodes qu'il a indiquées avec ceux que je donne ici.

Je m'occuperai d'abord des asymptotiques qui sont des hélices et des lignes de plus grande pente: j'ai déjà signalé que ces courbes étaient les parallèles de la surface. Le long de l'une d'elles  $\varphi$  et  $u$  sont constants; on a donc

$$\varphi = e^{\alpha\theta} \times \text{const.}, \quad \frac{\rho}{z} = \text{const.};$$

ces relations expriment que les projections des asymptotiques sont des spirales logarithmiques homothétiques ( $\alpha$  est précisément l'angle de la tangente et du rayon vecteur) et que ces asymptotiques sont tracées sur des cônes de révolution autour de Oz et de sommet O. D'où il résulte que ce sont des courbes bien connues sous le nom d'*hélices cylindro-coniques*.

En ce qui concerne la seconde famille d'asymptotiques des surfaces (S), l'équation à intégrer est

$$Dd\varphi + 2D'd\psi = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial z}{\partial u} du + 2 \frac{\partial z}{\partial \psi} d\psi = 0.$$

Je reviendrai prochainement sur cette équation<sup>1</sup>. Dans le

<sup>1</sup> J'étudierai plus généralement les équations différentielles du premier ordre qui peuvent être mises sous la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + m \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0,$$

$z$  étant une fonction connue de  $x$  et de  $y$ , et  $m$  une constante quelconque. Je signalerai notam-

cas particulier actuel, elle donne

$$au + 2\psi = \text{const.},$$

d'où l'équation des projections

$$\rho = e^{-\frac{2+a^2}{a}\theta} \times \text{const.}$$

ce sont bien des spirales logarithmiques homothétiques. Les images sphériques de ces asymptotiques ne présentent rien de remarquable.

Le cas  $a = \sqrt{2}.i$  correspond à l'une des surfaces de BIANCHI : les projections des asymptotiques (de la seconde famille) sont des cercles concentriques. Cette surface est d'ailleurs imaginaire.

### III

6. — Je terminerai ce Mémoire par une application nouvelle de l'équation des télégraphistes : c'est le nom donné par MM. POINCARÉ, PICARD et BOUSSINESQ, dans trois Communications à l'Académie, en 1893 et 1894, à l'équation

$$A \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2B \frac{\partial V}{\partial t} = C \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

qui représente la variation du potentiel  $V$  dans un fil ; les différents termes correspondent respectivement à la self-induction, à la résistance ohmique et à la capacité du fil. Par un choix convenable d'unités, l'unité de vitesse étant la vitesse de la lumière, on peut réduire les coefficients constants  $A$ ,  $B$ ,  $C$  à l'unité. Posant alors

$$V = U \cdot e^{-t},$$

l'équation des télégraphistes prend la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U;$$

---

ment un cas d'intégration de l'équation différentielle qui correspond à une fonction  $z$  dépendant de deux fonctions arbitraires de  $x$  et de deux fonctions arbitraires de  $y$ , c'est-à-dire à une fonction  $z$  intégrale générale d'une certaine équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.