Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1910)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'ÉQUATION DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR ET DE L'ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES

Autor: Turrière, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12782

d'où l'on déduit, en désignant par k une constante arbitraire :

$$(1+\mathrm{T}^2)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + u^2 = k^2 ,$$

ou bien

$$\frac{du}{\pm\sqrt{k^2-u^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1+\mathrm{T}^2}} ,$$

et encore

$$\operatorname{arc\,cos} \frac{u}{k} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+\mathrm{T}^2}} , \quad u = k \cos \int \frac{dt}{\sqrt{1+\mathrm{T}^2}} \tag{9}$$

Finalement, en vertu des formules (8) et (9), on trouve

$$\operatorname{cotg}(\varphi - t) = (1+\mathrm{T}^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \int \frac{dt}{\sqrt{1+\mathrm{T}^2}} \tag{10}$$

et puisque l'intégrale écrite dans cette dernière équation comporte un terme arbitraire, c'est bien là l'intégrale générale de l'équation (7).

V. Jamet (Marseille).

SUR DES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'ÉQUATION DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR ET DE L'ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES

---

1. — On connaît des exemples de questions de Géométrie qui dépendent d'équations aux dérivées partielles du second ordre réductibles à de certaines équations de la Physique mathématique. C'est ainsi que la détermination des surfaces dont les asymptotiques se projettent sur un plan donné, suivant des courbes données (problème qui a été étudié par divers géomètres, par MM. Kœnigs, Bioche, etc.), a été ramenée, dans des cas particuliers, à l'équation du mouvement de la chaleur dans un espace à une dimension ; Bianchi a établi, pour la première fois, que les surfaces dont les asympto-

tiques d'un système se projettent sur un plan donné suivant des circonférences concentriques, dépendent de cette équation ; ce théorème a été étendu par M. BUHL, dans un Mémoire inséré au *Bulletin de la Société mathématique* de 1903, aux courbes intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q},$$

dans laquelle P et Q sont des fonctions linéaires de x et de y.

Outre l'intérêt de pure curiosité que peuvent présenter de tels résultats, il est possible de tirer profit de nombreux travaux relatifs aux équations de la Physique mathématique, d'utiliser, par exemple, les intégrales qui en ont été indiquées.

I

2. — Dans un de ses Mémoires, BONNET annonça qu'il étudierait ultérieurement les surfaces qui admettent des hélices pour lignes asymptotiques; cependant aucun travail ne fut publié sur cette question importante et délicate, dont on ne connaît que de rares solutions (surface minima d'Enneper). — En observant que, si une hélice est une asymptotique d'une surface, cette courbe est une ligne de plus grande pente de la surface pour une orientation donnée, et que, réciproquement, si une asymptotique est ligne de plus grande pente d'une surface elle est aussi une hélice, j'ai été conduit à *déterminer les surfaces* (S) *dont les lignes de plus grande pente sont des asymptotiques.* Ces surfaces (S) présentent une particularité intéressante : les hélices qui constituent une famille d'asymptotiques ont toutes la même droite directrice.

Soit un système d'axes rectangulaires Ox, Oy et Oz, ce dernier étant vertical. Les équations respectives des lignes de plus grande pente et des asymptotiques étant

$$pdy - qdx = 0,$$

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0,$$

l'équation des surfaces (S) est

$$p^2r + 2pqs + q^2t = 0\ ;$$

cette équation et l'équation

$$y^2r - 2xys + x^2t = 0$$

des surfaces dont les asymptotiques d'un système sont situées sur des cylindres de révolution autour de Oz, se correspondent par la transformation de Legendre. Il en résulte une propriété immédiate des développables circonscrites aux surfaces (S) le long des lignes de plus grande pente ; il en résulte aussi, ce qui nous intéresse davantage, que la *détermination des surfaces* (S) *est réductible à l'intégration de l'équation du mouvement de la chaleur*, en vertu du théorème de Bianchi.

3. — Considérons alors une surface quelconque, non développable, enveloppée par le plan

$$x \cos\varphi \cos\psi + y \cos\varphi \sin\psi + z \sin\varphi = \varpi\ ;$$

ϖ désigne la distance de l'origine O au plan tangent ; c'est une fonction de la longitude ψ et de la latitude φ de l'image sphérique du point de contact, dans la représentation sphérique de Gauss.

Dans cette représentation tangentielle, l'équation différentielle des images sphériques des lignes de plus grande pente est

$$D'd\varphi + D''d\psi = 0\ ,$$

et celle des images des asymptotiques est

$$Dd\varphi^2 + 2D'd\varphi d\psi + D''d\psi^2 = 0\ ;$$

D, D′ D″ sont les déterminants de Gauss (notations de Bianchi) ; leurs expressions sont

$$\begin{aligned} D &= \varpi + r\ , \\ D' &= q \operatorname{tg}\varphi + s\ , \\ D'' &= \varpi \cos^2\varphi - p \sin\varphi \cos\varphi + t\ , \end{aligned}$$

p, q, r, s, t désignant les dérivées de ϖ par rapport à φ et à ψ.

En excluant le cas de dégénérescence tangentielle de la surface en une courbe, pour lequel $DD'' - D'^2$ est nul, on voit que les surfaces (S) sont caractérisées par l'équation $D'' = 0$. *Les images sphériques des asymptotiques qui sont lignes de plus grande pente sont les parallèles de la sphère.* En d'autres termes, en adoptant la dénomination de MINDING, ces asymptotiques sont les parallèles de la surface (S).

L'équation $D'' = 0$ est une équation du second ordre qu'une transformation fort simple ramène à l'équation du mouvement de la chaleur. Posons en effet

$$u = \log (\operatorname{tg} \varphi) , \quad \varpi = V \sin \varphi ;$$

D, D', D'' deviennent en général

$$D = \frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(V + \frac{\partial V}{\partial u}\right),$$

$$D' = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi}\left(V + \frac{\partial V}{\partial u}\right),$$

$$D'' = \sin \varphi \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} - \frac{\partial V}{\partial u}\right) ;$$

l'expression

$$z = V + \frac{\partial V}{\partial u} ,$$

qui figure dans D et D' n'est autre, d'ailleurs, que la cote du point de contact du plan avec la surface enveloppée. Sous la forme précédente, il est évident que l'équation $D'' = 0$ n'est autre que l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}$$

du mouvement de la chaleur.

4. — Les surfaces (S) dépendant de l'équation du mouvement de la chaleur, on pourra leur appliquer des résultats connus et relatifs à cette équation célèbre.

On pourra définir ces surfaces par les formules

$$x = e^u \left[- \cos \psi \frac{\partial V}{\partial u} - \sin \psi \frac{\partial V}{\partial \psi} \right],$$

$$y = e^u \left[- \sin \psi \frac{\partial V}{\partial u} + \cos \psi \frac{\partial V}{\partial \psi} \right],$$

$$z = V + \frac{\partial V}{\partial u},$$

dans lesquelles V sera exprimée en fonction de ψ et de u par l'intermédiaire d'une intégrale définie : on prendra, par exemple, l'intégrale que donna Ampère

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \Theta(\psi + 2\lambda\sqrt{u})\, d\lambda,$$

ou celle

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\lambda) \,.\, e^{i\lambda\psi - \lambda^2 u}\, d\lambda,$$

que considère M. H. Poincaré.

On pourra aussi prendre pour V un développement en série de la forme

$$V = U_1 + \frac{\psi - \psi_0}{1} U_2 + \frac{(\psi - \psi_0)^2}{2\,!} U'_1 + \frac{(\psi - \psi_0)^3}{3\,!} U'_2 + \dots,$$

où U_1 et U_2 sont deux fonctions arbitraires de u, de dérivées U'_1, U'_2, ... ; un tel développement est convergent tant que u diffère de toute valeur qui soit singulière pour U_1 ou U_2. A ce développement contenant deux fonctions arbitraires, peut être subtitué un développement ne contenant qu'une fonction arbitraire Ψ de ψ :

$$V = \Psi + \frac{u - u_0}{1} \Psi'' + \frac{(u - u_0)^2}{2\,!} \Psi^{IV} + \dots;$$

cette solution, lorsque c'est une série convergente, est aussi générale que la précédente, d'après Poisson[1].

[1] Voir à ce sujet une courte note de M. Le Roux « *Sur les intégrales analytiques de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x} ».$$

(*Bulletin des Sciences Mathématiques* de M. Darboux, 1895, p. 127-128).

Comme application d'une autre nature, je citerai les formules de transformation à six constantes arbitraires données par M. Appell et qui laissent invariante l'équation du mouvement de la chaleur.

Laissant de côté ces applications de résultats relatifs à l'équation $r = q$, je choisirai parmi les solutions particulières connues

$$V = e^{a\psi + a^2 u}, \qquad V = \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\psi^2}{4u}}, \ldots,$$

la première de ces solutions : elle donne des résultats intéressants, relativement à des surfaces étudiées par M. Buhl, dans deux Mémoires insérés aux *Nouvelles Annales* de 1908 et de 1909 [1].

II

5. Je considère donc la solution

$$V = e^{a\psi + a^2 u};$$

je poserai

$$a = \text{cotang}\ \alpha .$$

Les coordonnées cylindriques d'un point quelconque de la surface (S) correspondante sont pour cette solution particulière :

$$\rho = -\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} e^{u} V, \ \theta = \psi - \alpha, \ z = \frac{V}{\sin^2\alpha};$$

il résulte de ces expressions que l'équation de la surface (S), en coordonnées cylindriques, est de la forme

$$\Phi(z) = a\theta + F(\rho)$$

en posant

$$\Phi(z) = (1 + a^2) \log z + \text{const.},$$

$$F(\rho) = a^2 \log \rho ;$$

[1] Je dois cependant signaler qu'à la solution $V = \psi$, correspond l'*hélicoïde gauche* à plan directeur, $\varpi = \psi \sin \varphi$, pour lequel les asymptotiques sont les parallèles $\psi =$ const. et les méridiens $\psi =$ const.

on reconnaît là des surfaces spirales qui rentrent dans la catégorie de celles que M. BUHL a étudiées; en appliquant les résultats auxquels il a été conduit, on voit que les *deux familles d'asymptotiques se projettent sur* Oxz *suivant des spirales logarithmiques homothétiques :* ces surfaces appartiennent, par suite, et à un *double titre*, à la famille des surfaces dont *une* famille d'asymptotiques se projette sur Oxy suivant des spirales logarithmiques homothétiques, c'est-à-dire aux surfaces étudiées par M. BUHL dans son Mémoire de 1903, antérieurement cité.

Il est intéressant de se reporter aux trois Mémoires de M. BUHL, afin de comparer les résultats obtenus par les méthodes qu'il a indiquées avec ceux que je donne ici.

Je m'occuperai d'abord des asymptotiques qui sont des hélices et des lignes de plus grande pente : j'ai déjà signalé que ces courbes étaient les parallèles de la surface. Le long de l'une d'elles φ et u sont constants; on a donc

$$\rho = e^{a\theta} \times \text{const.} , \quad \frac{\rho}{z} = \text{const.} ;$$

ces relations expriment que les projections des asymptotiques sont des spirales logarithmiques homothétiques (α est précisément l'angle de la tangente et du rayon vecteur) et que ces asymptotiques sont tracées sur des cônes de révolution autour de Oz et de sommet O. D'où il résulte que ce sont des courbes bien connues sous le nom d'*hélices cylindro-coniques*.

En ce qui concerne la seconde famille d'asymptotiques des surfaces (S), l'équation à intégrer est

$$\mathrm{D}d\varphi + 2\mathrm{D}'d\psi = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial z}{\partial u}du + 2\frac{\partial z}{\partial \psi}d\psi = 0 .$$

Je reviendrai prochainement sur cette équation [1]. Dans le

---

[1] J'étudierai plus généralement les équations différentielles du premier ordre qui peuvent être mises sous la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + m\frac{\partial z}{\partial y}dy = 0 ,$$

z étant une fonction connue de x et de y, et m une constante quelconque. Je signalerai notamcas particulier actuel, elle donne

$$au + 2\psi = \text{const.},$$

d'où l'équation des projections

$$\rho = e^{-\frac{2+a^2}{a}\theta} \times \text{const.}$$

ce sont bien des spirales logarithmiques homothétiques. Les images sphériques de ces asymptotiques ne présentent rien de remarquable.

Le cas $a = \sqrt{2} . i$ correspond à l'une des surfaces de BIANCHI : les projections des asymptotiques (de la seconde famille) sont des cercles concentriques. Cette surface est d'ailleurs imaginaire.

III

6. — Je terminerai ce Mémoire par une application nouvelle de l'*équation des télégraphistes :* c'est le nom donné par MM. POINCARÉ, PICARD et BOUSSINESQ, dans trois Communications à l'Académie, en 1893 et 1894, à l'équation

$$A \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2B \frac{\partial V}{\partial t} = C \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

qui représente la variation du potentiel V dans un fil; les différents termes correspondent respectivement à la self-induction, à la résistance ohmique et à la capacité du fil. Par un choix convenable d'unités, l'unité de vitesse étant la vitesse de la lumière, on peut réduire les coefficients constants A, B, C à l'unité. Posant alors

$$V = U . e^{-t},$$

l'équation des télégraphistes prend la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U ;$$

ment un cas d'intégration de l'équation différentielle qui correspond à une fonction z dépendant de deux fonctions arbitraires de x et de deux fonctions arbitraires de y, c'est-à-dire à une fonction z intégrale générale d'une certaine équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

c'est là un type d'équations fréquent en Physique ; un changement bien simple de variables, mais qui introduit les imaginaires, ramène cette équation à celle qui se présente dans les vibrations des membranes

$$\Delta_2 U + U = 0 .$$

Il est préférable de ramener l'équation des télégraphistes à l'équation à invariants égaux et constants

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} + U = 0 ;$$

cette dernière équation aux dérivées partielles, dont les rapports avec l'équation différentielle de Bessel sont bien connus, est un type auquel on peut réduire un grand nombre d'équations : je citerai les exemples suivants, empruntés à Ampère et Imschenetsky :

$$rx^2 + 2sx^2 + \left(x^2 - \frac{b^2}{q^2 x^2}\right) t - 2x = 0 ,$$

$$r + 2qs + (q^2 - b^2) t = 0 ;$$

je citerai également l'équation remarquable

$$s^2 = 4pq ,$$

rencontrée par Craig dans des recherches géométriques, et que M. Goursat ramena ultérieurement à la forme $s = z$.

J'ai établi, dans un autre Mémoire [1], le théorème suivant : *La détermination des surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies inclinées à 45° sur les méridiens, peut être ramenée à l'intégration de l'équation des télégraphistes.* Ce n'est là qu'un cas particulier d'un théorème plus général concernant des loxodromies quelconques.

Considérons, en effet, les loxodromies

$$d\varphi = \text{cotg}\, \alpha \,.\, d\psi \,.\, \cos \varphi ,$$

[1] *Application de l'équation des télégraphistes aux surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies.* (*Nouvelles Annales*, Janvier 1910.)

inclinées à α° sur les méridiens. L'équation des images sphériques des lignes de courbure étant

$$d\varphi^2 - \cos^2\varphi \,.\, d\psi^2 + \frac{D'' - D\cos^2\varphi}{D'}\, d\varphi d\psi = 0\ ,$$

l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$D'' - D\cos^2\varphi + 2\cot g\, 2\alpha\, D' \cos\varphi = 0\ ,$$

représente les surfaces (Σ) dont les images sphériques des deux systèmes de lignes de courbure sont les loxodromies.

$$d\varphi = -\operatorname{tg}\alpha \,.\, d\psi \,.\, \cos\varphi\ ,$$
$$d\varphi = \cot g\,\alpha \,.\, d\psi \,.\, \cos\varphi\ ,$$

Introduisons alors l'argument τ des fonctions hyperboliques liées aux fonctions circulaires de φ par les relations de M. Laisant

$$\sin\varphi = th\tau\ ,\ \cos\varphi \,.\, ch\tau = 1\ ,\ \operatorname{tg}\varphi = sh\tau\ ,$$

et prenons pour nouvelle fonction inconnue la fonction U de ψ et de τ définie par la relation

$$U = \varpi ch\tau\ .$$

Les déterminants D, D′, D″ de Gauss deviennent

$$D = \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}\, ch\tau - \frac{\partial U}{\partial \tau}\, sh\tau\ ,$$

$$D' = \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \psi}\ ,$$

$$D'' = \left(U + \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}\right)\frac{1}{ch\tau} - \frac{\partial U}{\partial \tau} \cdot \frac{sh\tau}{ch^2\tau}\ ;$$

l'équation considérée devient :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + U + 2\cot g\, 2\alpha\, \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \psi} = 0\ .$$

Pour $\alpha = 45^\circ$, cette équation est identique à celle en laquelle M. Poincaré transforme l'équation des télégraphistes. C'est bien là le théorème que j'avais établi. Mais il suffit de poser

$$\tau = \frac{u + v}{\sin \alpha \cos \alpha}, \quad \psi = \frac{v}{\sin^2 \alpha} - \frac{u}{\cos^2 \alpha},$$

pour transformer l'équation générale en

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} = U ;$$

d'où résulte le théorème : *La détermination des surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies est réductible à l'équation des télégraphistes.*

E. TURRIÈRE (Toulouse).

SUR LA NOTION DE PUISSANCE EN MÉCANIQUE

Dans l'enseignement élémentaire de la mécanique, on se contente le plus souvent d'une définition trop rapide de la puissance. Il conviendrait cependant d'insister sur cette notion, d'une grande l'importance pratique. Les élèves entendent parler, dans la vie courante, de *chevaux* ou de *watts* plus souvent que de *kilogrammètres* ou *d'ergs*[1]; il est donc utile de leur apprendre à appliquer les formules de mécanique à l'évaluation des nombres correspondants.

Je vais montrer rapidement ici comment on peut définir avec soin la notion de puissance et la faire avantageusement intervenir à côté de celle de travail élémentaire soit en statique soit en dynamique. Un très léger changement des équations (dérivées figurant à la place de différentielles) amène leurs différents termes à se prêter immédiatement au

[1] L'emploi fréquent de l'*hectowatt-heure* ou du *cheval-an* comme unités pratiques d'énergie est assez significatif au point de vue de l'importance industrielle respective des mesures de puissance et de travail.