Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1910)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES DÉVELOPPÉES D'UNE COURBE GAUCHE

Autor: Jamet, V.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12781

exige, en effet, qu'une fonction continue définie physiquement prenne, dans un intervalle quelconque, toutes les valeurs comprises entre ses valeurs extrêmes, propriété qui appartient bien aux fonctions appelées continues par les mathématiciens. Rien n'empêche d'ailleurs, comme on sait, d'étendre cette dernière notion aux champs purement rationnels (la définition peut en effet se résumer dans la formule :

$$\lim_{x=a} f(x) = f(a) \ ;$$

mais alors la propriété énoncée ne subsiste pas ; c'est ainsi que la fonction x^2 ne prend plus la valeur rationnelle 2. On est conduit à compléter le champ rationnel par tous ses points-limites, ce que n'exigeait à aucun degré l'idée seule de la mesure.

Il semble donc bien, en définitive, que ce soit dans l'idée de fonction continue, et non dans celle de mesure que l'on doit chercher la raison d'être du nombre irrationnel dans les applications des Mathématiques.

G. Combebiac (Montauban).

SUR LES DÉVELOPPÉES D'UNE COURBE GAUCHE[1]

Les propriétés connues des développées d'une même courbe gauche permettent de soupçonner que la recherche de toutes ces développées se ramène à l'étude d'une même équation différentielle dont il suffit de connaître une intégrale particulière, pour en trouver l'intégrale générale.

Effectivement, le problème se traduit par une équation de Ricatti ; mais un examen quelque peu attentif de cette équation permet d'en exprimer l'intégrale générale au moyen d'une quadrature.

Soient x, y, z, les coordonnées rectangulaires d'un point M, mobile sur une courbe donnée S, t l'angle que fait, avec

[1] La même question a été traitée, sous une forme toute différente, par M. Bianchi, dans le premier chapitre de son traité de Géométrie infinitésimale : le lecteur voudra bien, je l'espère, reconnaître que chacune des deux méthodes a son intérêt propre.

l'axe Ox, la tangente au point m, projection de M sur le plan des xy, à la courbe lieu de m, s l'arc de cette courbe compté à partir d'un point fixe, de sorte que l'on ait

$$dx = \cos t ds \ , \quad dy = \sin t ds \ ; \tag{1}$$

on peut compléter la détermination de la courbe S, en posant

$$dz = \frac{ds}{T} \tag{2}$$

T désignant une fonction donnée de t.

Soient encore α, β, γ, les angles que fait, avec les axes de coordonnées, une normale, en M, à la courbe S. Pour que cette normale soit tangente à une courbe Σ, développée de la courbe S, il faut que l'on ait

$$\frac{d \cos \alpha}{d \cos \gamma} = \frac{dx}{dz} \ , \quad \frac{d \cos \beta}{d \cos \gamma} = \frac{dy}{dz} \ , \tag{3}$$

comme on le démontre dans tous les cours de calcul différentiel. Mais il y a, entre α, β, γ, la relation,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \ ,$$

qu'on peut remplacer par celles-ci :

$$\cos \alpha = \cos \varphi \sin \gamma \ , \quad \cos \beta = \sin \varphi \sin \gamma \ , \tag{4}$$

φ désignant une fonction de t, définie par une relation que nous voulons établir.

A cet effet, nous transformons les équations (3), au moyen des formules (1), (2), (4), et nous trouvons :

$$- \sin \varphi \frac{d\varphi}{d\gamma} + \operatorname{cotg} \gamma \cos \varphi = - \mathrm{T} \cos t \ ,$$

$$\cos \varphi \frac{d\varphi}{d\gamma} + \operatorname{cotg} \gamma \sin \varphi = - \mathrm{T} \sin t \ .$$

Nous en déduisons :

$$\frac{d\varphi}{d\gamma} = \mathrm{T} \sin (\varphi - t) \ , \quad \operatorname{cotg} \gamma = - \mathrm{T} \cos (\varphi - t) \ , \tag{5}$$

ou bien :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} T \cos(\varphi - t)$$

et

$$d\gamma = \frac{T' \cos(\varphi - t)\,dt - T \sin(\varphi - t)(d\varphi - dt)}{1 + T^2 \cos^2(\varphi - t)} \tag{6}$$

Des équations (5) et (6) résulte celle-ci

$$(1 + T^2 \cos^2(\varphi - t))\, d\varphi = T \sin(\varphi - t)[T' \cos(\varphi - t)\,dt - T \sin(\varphi - t)(d\varphi - dt)] ,$$

équivalente à

$$(1 + T^2)\, d\varphi = T \sin(\varphi - t)\,[T' \cos(\varphi - t) + T \sin(\varphi - t)]\, dt ,$$

ou bien, à :

$$(1 + T^2)(d\varphi - dt) = [TT' \sin(\varphi - t) \cos(\varphi - t) + T^2 \sin^2(\varphi - t) - (1 + T^2)]\, dt ,$$

ou encore, à :

$$(1 + T^2)\, \frac{d\varphi - dt}{\sin^2(\varphi - t)} = [TT' \cot(\varphi - t) - (1 + T^2) \cot^2(\varphi - t) - 1]\, dt .$$

ou enfin, à :

$$(1 + T^2) \left[- \frac{d \operatorname{cotg}(\varphi - t)}{dt} + \cot^2(\varphi - t)\right] = TT' \operatorname{cotg}(\varphi - t) - 1, \tag{7}$$

et c'est bien là une équation de Riccati, où la fonction inconnue est cotg $(\varphi - t)$.

Mais si l'on pose

$$\operatorname{cotg}(\varphi - t) = - \frac{1}{u} \frac{du}{dt} \tag{8}$$

on transforme l'équation ci-dessus en une équation différentielle du second ordre, savoir

$$(1 + T^2)\, \frac{d^2u}{dt} + TT' \frac{du}{dt} + u = 0 ,$$

dont on trouvera l'intégrale générale comme il suit. Si l'on multiplie son premier membre par $\frac{du}{dt}$, on trouve :

$$D_t\left[\left(1 + T^2\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + u^2\right] = 0 ,$$

d'où l'on déduit, en désignant par k une constante arbitraire :

$$(1 + T^2)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + u^2 = k^2 ,$$

ou bien

$$\frac{du}{\pm\sqrt{k^2 - u^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1 + T^2}} ,$$

et encore

$$\text{arc cos} \frac{u}{k} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + T^2}} , \quad u = k \cos \int \frac{dt}{\sqrt{1 + T^2}} \tag{9}$$

Finalement, en vertu des formules (8) et (9), on trouve

$$\text{cotg}\,(\varphi - t) = (1 + T^2)^{-\frac{1}{2}} \text{tg} \int \frac{dt}{\sqrt{1 + T^2}} \tag{10}$$

et puisque l'intégrale écrite dans cette dernière équation comporte un terme arbitraire, c'est bien là l'intégrale générale de l'équation (7).

V. JAMET (Marseille).

SUR DES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'ÉQUATION DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR ET DE L'ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES

---

1. — On connaît des exemples de questions de Géométrie qui dépendent d'équations aux dérivées partielles du second ordre réductibles à de certaines équations de la Physique mathématique. C'est ainsi que la détermination des surfaces dont les asymptotiques se projettent sur un plan donné, suivant des courbes données (problème qui a été étudié par divers géomètres, par MM. KŒNIGS, BIOCHE, etc.), a été ramenée, dans des cas particuliers, à l'équation du mouvement de la chaleur dans un espace à une dimension ; BIANCHI a établi, pour la première fois, que les surfaces dont les asympto-