II

si l'on tient compte du fait que la majorité de ses élèves se composait de futurs ingénieurs, sollicités surtout vers la mécanique appliquée et n'accordant au cours de mécanique rationnelle que l'intérêt dû à son importance relative à l'examen. Quant aux futurs docteurs en sciences mathématiques, peu ont osé se hasarder à entreprendre des études spéciales sur la mécanique. Non pas par défiance à l'égard du professeur ou moins encore par antipathie, mais par suite de l'organisation particulière des études du doctorat. Car Massau jouissait à juste titre d'une popularité de bon aloi dans les milieux universitaires ; toutes les sympathies allaient instinctivement à cette figure franche, ouverte et empreinte de la bonhomie la plus sincère. C'était le père des étudiants ; au milieu de leurs réunions fraternelles, il se sentait redevenir jeune et il redevenait, pour un instant, le joyeux compagnon de jadis ; en un mot, il était pour ses élèves bien moins un maître qu'un ami.

D'autre part, à Gand, les cours du doctorat ès sciences mathématiques ne sont suivis que par de très rares élèves, la carrière offrant peu de ressources. De sorte que très peu ont eu l'occasion d'écouter ses leçons sur la partie la plus intéressante de son ouvrage, qui, malgré l'originalité des questions traitées, n'a pas eu la publicité qu'il méritait. Et cependant, quelle mine inépuisable de matériaux variés ; quelles méthodes simples et élégantes ! L'esprit est émerveillé devant ces généralisations hardies et ces concepts d'une profondeur remarquable.

II

Le lecteur me permettra de feuilleter avec lui les deux tomes de la *Mécanique rationnelle* de mon vénéré maître ; il se proposait d'y ajouter une troisième partie sur les compléments et la mécanique céleste.

L'ouvrage débute par une introduction de quatre-vingts pages, dans laquelle l'auteur expose les principes de la géométrie vectorielle dont il fera usage dans son cours de mécanique. Ce dernier comprend trois parties : statique, cinématique, dynamique, et se termine par un appendice sur lequel j'aurai l'occasion de revenir plus loin.

Chose digne de remarque : la mécanique est exposée en faisant usage d'une façon systématique des notations vectorielles ; l'exposition y gagne en clarté et en concision. Il se sert presque exclusivement des trois symboles $\overline{a}$, $\overline{ab}$, $\mathrm{M}\overline{ab}$. Le premier $\overline{a} \equiv \overline{\mathrm{AB}}$ est le *vecteur* joignant les deux points A et B et de longueur a, dans lequel on distingue une grandeur, une direction et un sens. Le second $\overline{ab}$ est le *produit géométrique* de deux vecteurs $\overline{a}$ et $\overline{b}$; il est égal au produit algébrique de leurs grandeurs par le cosinus de leur angle. Quant à $\mathcal{M}\overline{ab}$ ou le *moment géométrique* des vecteurs $\overline{a}$ et $\overline{b}$, c'est un vecteur dont la grandeur est proportionnelle à la surface du parallélogramme construit sur a et sur b comme côtés et dont la direction est perpendiculaire au plan de ce parallélogramme. Pour achever de le définir, on suppose le contour de ce parallélogramme parcouru dans le sens OACBO ($\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$); le sens du moment géométrique sera pris tel qu'un observateur placé le long de ce vecteur, les pieds à l'origine O et la tête à l'extrémité verrait le mobile se mouvoir dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.

Le produit géométrique a été défini par Resal (*Traité de cinématique pure*, Paris, Malley-Bachelier, 1862); la notion du moment géométrique est due à Massau (*Cours de mécanique de l'Université de Gand*, 1879, Gand, Lobel; Paris, Gauthier-Villars). A la vérité, avant ces auteurs, et à peu près à l'époque où Grassmann publiait ses recherches, de Saint-Venant (*C. R.*, 1844, 2me semestre, p. 620) avait défini, sous le nom de produit géométrique d'une aire et de produit géométrique de deux vecteurs, des combinaisons analogues à celles qui ont été étudiées par Resal et Massau; mais si l'on se reporte à la note citée, on reconnaîtra sans peine que les équations aréaires et celles qu'on peut en déduire n'ont pas la précision qu'offrent les équations qui résultent de l'emploi du produit et du moment géométriques. Pour leur donner cette précision, il faudrait substituer aux aires planes les vecteurs qui les représentent; c'est précisément en cela que consiste le progrès réalisé par Massau.

Ces définitions étant admises, un point M quelconque est déterminé par rapport à un point O pris comme origine quand on connaît le vecteur OM. Alors $\overline{e} = \overline{OM}$ est la *coordonnée vectorielle* de M.

On conçoit que lorsque M décrit une courbe (C) ou une surface (S), $\overline{e}$ varie; dans le premier cas, $\overline{e}$ dépend d'une seule variable indépendante t et on a $\overline{e} = \overline{f}(t)$; dans le second, au contraire, $\overline{e}$ dépend de deux variables indépendantes t et t' qui peuvent être les coordonnées de Gauss, et $\overline{e} = \overline{f}(t, t')$.

On conçoit que toute la théorie des courbes et des surfaces peut se faire par la géométrie vectorielle; c'est la méthode suivie par M. Demoulin dans la théorie des complexes, congruences et surfaces réglées (Bruxelles, Castaigne, 1894) et dans son cours de géométrie infinitésimale de l'Université de Gand. On éprouve un véritable plaisir à manier les équations vectorielles qui, chaque fois, remplacent trois équations analytiques de projection sur trois axes rectangulaires.

Ces fonctions géométriques sont soumises aux mêmes règles que les fonctions ordinaires de l'analyse infinitésimale et l'auteur a soin chaque fois d'interpréter les résultats géométriquement.

Mais où l'originalité de son esprit s'affirme avec le plus de netteté, c'est quand il introduit la notion de *limite relative :* un infiniment petit d'ordre k étant mis sous la forme $\overline{\mathrm{M}}dt^k$ (dt convergeant vers zéro), si on remplace le vecteur $\overline{\mathrm{M}}$ par sa limite $\overline{m}$, on obtient un autre infiniment petit $\overline{m}dt^k$ qui est la limite relative du premier.

Cette définition s'applique évidemment aux infiniment petits analytiques ; elle s'applique aussi aux quantités finies : leurs limites relatives se confondent avec leurs limites absolues. Ces limites relatives jouissent de plusieurs propriétés intéressantes ; ainsi *la limite relative d'une figure est la limite absolue d'une figure semblable à la figure infiniment petite; les limites relatives des longueurs, des aires et des volumes infiniment petits sont les longueurs, les aires, les volumes pris dans la limite relative de la figure.* Toute figure infiniment petite a pour limite absolue un point qui est le *pôle de convergence;* si on prend ce pôle comme origine, tout point de la figure donnée a une coordonnée vectorielle de la forme $\overline{\mathrm{M}}dt^k$; aux limites relatives, ce point est remplacé par un autre dont la coordonnée est $\overline{m}dt^k$.

Les relations entre deux figures infiniment petites sont régies par la théorie des *lignes de rappel.* Deux figures infiniment petites ont respectivement pour pôles de convergence les points P et Q ; deux points A et B de ces figures sont réunis par une ligne de rappel AB ; ces points sont soumis par là à une condition ; il s'agit de savoir ce que devient cette condition aux limites relatives. La droite AB est une ligne qui a pour limite absolue PQ ; on suppose que la droite AB coupe sa limite en un point O ; la limite O′ du point d'intersection O est ce que Massau appelle le *foyer* de la ligne de rappel.

Ces notions fondamentales ont permis à l'auteur de construire une méthode de calcul qui se suffit à elle-même et de développer son cours de mécanique suivant la voie qu'il s'était tracée, c'est-à-dire en se servant exclusivement des notations vectorielles. Ceux qui veulent se convaincre de la beauté des procédés employés n'ont qu'à lire ces pages, où l'auteur a traité d'une façon magistrale les principales théories de la statique. Il a adopté la division suivante dans l'étude de cette branche : Statique du point. — Statique des systèmes solides invariables. — Statique des systèmes quelconques. — Principe des vitesses virtuelles. — Applications. Les deux derniers chapitres sont particulièrement intéressants ; à signaler, parmi les applications, la détermination des centres de gravité.

La cinématique a fourni à Massau l'occasion d'exposer avec simplicité et élégance ses théories fondamentales et de montrer ainsi la portée de la méthode vectorielle. A mentionner tout particulièrement le mouvement du point aréolaire, le mouvement élémentaire d'une figure glissant dans son plan, le mouvement d'une surface mobile invariable sur une surface fixe, le mouvement fini d'un système invariable, le mouvement d'un système invariable autour d'un point fixe. Dans l'étude du mouvement parallèle à un plan fixe, l'auteur, par l'emploi de méthodes très simples, arrive à des résultats très remarquables au point de vue géométrique. Le paragraphe traitant du mouvement relatif lui donne l'occasion d'établir la formule très curieuse suivante :

$$\mathrm{M}\bar{c}\mathrm{M}\overline{ab} = \bar{a}(\overline{bc}) - \bar{b}(\overline{ac})$$

qu'il applique aux différentielles et aux dérivées de fonctions géométriques.

Cela nous amène à consacrer quelques lignes à l'étude d'une question où la personnalité et l'originalité du penseur se sont affirmées avec le plus de netteté ; il s'agit de la *fonction linéaire* la plus générale. On écrira $\bar{\mathrm{E}} = \varphi(e)$, et on dira que $\bar{\mathrm{E}}$ est une fonction linéaire de $\bar{e}$, si l'on a

$$\bar{\mathrm{E}} = \bar{a}_x x + \bar{a}_y y + \bar{a}_z z$$

x, y, z étant les projections de $\bar{e}$ sur trois axes rectangulaires. La *fonction linéaire inverse* est $\bar{e} = \varphi^{-1}(\bar{\mathrm{E}})$. La fonction φ' est *conjuguée* de φ si $\bar{e}\varphi(\bar{\mathrm{E}}) = \bar{\mathrm{E}}\varphi'(\bar{e})$, quelles que soient $\bar{e}$ et $\bar{\mathrm{E}}$. Ces relations définissent des transformations géométriques qui ont été étudiées par l'auteur avec le plus grand soin. Il appelle *fonction autoconjuguée* une fonction linéaire identique à la conjuguée ; dans ce cas, la transformation est particulièrement intéressante ; ainsi la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

se transforme en un ellipsoïde

$$\left(\frac{\mathrm{X}}{g_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{Y}}{g_2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{Z}}{g_3}\right)^2 = 1 ,$$

g_1 g_2 g_3 étant des éléments propres à cette transformation. M. Wasteels a appliqué cette méthode à l'étude de certains volumes dans les quadriques et en a déduit une généralisation du théorème de Lexell (M., 1907, p. 33).

Après avoir étudié ensuite la *fonction linéaire égale et contraire à sa conjuguée,* montré comment on peut décomposer la fonction linéaire la plus générale, Massau applique les résultats précédents à l'étude des déplacements finis autour d'un point, à la dilatation linéaire et à la dilatation cubique. Il y démontre le théorème suivant si intéressant et si inattendu : *le mouvement élémentaire autour d'un point* M *pendant un intervalle de temps* dt *se décompose en une déformation pure et une rotation instantanée (tourbillon).*

Enfin, pour terminer cette longue série de questions, viennent les applications aux problèmes des tangentes, de l'enveloppe d'une courbe invariable, des rayons de courbure, des roulettes; la règle de Savary; la théorie des axes dépendants et indépendants; une esquisse de la théorie des complexes, congruences et surfaces réglées et leur génération statique; les tétraèdres de Möbius.

La dynamique de Massau retiendra particulièrement notre attention par plusieurs questions où l'auteur s'écarte plus ou moins des théories exposées dans les traités. Tout d'abord il y a lieu de citer les nombreuses applications de la fonction vectorielle dans la théorie des moments d'inertie, la rotation des solides et la théorie des tourbillons en hydrodynamique. La démonstration des équations de Lagrange et d'Hamilton a été considérablement simplifiée. Tandis que beaucoup d'auteurs admettent comme évident l'existence d'un mouvement plan ou rectiligne, le mathématicien belge a soin d'établir deux théorèmes pour démontrer qu'il en est réellement ainsi.

La projection d'un point qui décrit une spirale logarithmique lui donne la solution générale du mouvement d'un point sollicité par une force centrale proportionnelle à la distance au centre d'action dans un milieu qui résiste comme la vitesse.

Lorqu'il y a une fonction de forces, la durée des petites oscillations d'un point sur une courbe est donnée par une formule simple où figurent le rayon de courbure de la courbe et celui d'une section normale de la surface de niveau qui passe par la position d'équilibre.

De plus, plusieurs changements ont été apportés à la théorie des tautochrones et des brachystochrones. Dans l'étude de l'influence de la rotation de la terre sur le mouvement des projectiles, l'auteur discute complètement la direction de la déviation comparée à celle du plan de tir.

Dès 1874, Massau a préconisé la *méthode de l'observatoire auxiliaire* dans l'étude des mouvements en général et particulièrement dans l'étude des mouvements relatifs. Il applique cette méthode aux mouvements relatifs des projectiles et du pendule à la surface de la terre. Pour ce qui concerne le mouvement des projectiles dans l'hypothèse de l'attraction terrestre constante, il retrouve, presque sans calcul, l'interprétation géométrique donnée par Bour et critiquée à tort par Resal et Gilbert.

On sait que les équations de translation des systèmes matériels conduisent au théorème du mouvement du centre de gravité. Il établit un théorème analogue en interprétant les équations de moment : c'est le théorème du centre de gravité des points aréolaires.

Massau fait suivre la théorie des moments d'inertie de la composition des quantités de mouvement et des forces d'inertie. Il a été ainsi ramené à composer un système de forces parallèles proportionnelles aux masses et aux distances de ces masses à un plan ; le centre de ces forces est le pôle du plan par rapport à l'image d'inertie.

Le mouvement du gyroscope de Foucault a été étudié approximativement par Quet dans l'hypothèse de la pesanteur constante. Bour a trouvé une solution exacte dans le cas de l'attraction terrestre constante. Les calculs de Quet et de Bour sont excessivement longs. En appliquant la méthode de l'observatoire auxiliaire, le mathématicien gantois retrouve la solution de Bour sans calcul.

Dans l'hydrostatique et l'hydrodynamique, qui terminent son cours de mécanique, l'auteur établit l'équation du mouvement varié des fluides, en partant d'une hypothèse plus vraisemblable que l'hypothèse du parallélisme des tranches.

Le dernier chapitre a pour objet la théorie des tourbillons. Massau s'inspire quelque peu de l'Ouvrage de M. H. Poincaré sur le même sujet. Mais sa méthode vectorielle lui permet d'exposer les principaux résultats avec plus de simplicité. C'est un fait connu que le théorème de Helmholtz sur la persistance des tourbillons conduit à une méthode pour étudier le mouvement des liquides. Massau montre que *le théorème de Helmholtz est insuffisant pour étudier le mouvement des gaz et qu'il est nécessaire d'y joindre un nouveau théorème, qu'il appelle le théorème de l'accélération de la dilatation cubique.* Pour faire voir que la distribution des vitesses obtenues par la comparaison électro-magnétique est la seule solution possible, quand le fluide est en repos à l'infini, l'auteur démontre le théorème suivant : « *Si les dérivées premières d'une fonction qui satisfait à l'équation de Laplace ne deviennent pas infinies, elles sont constantes* ». Au lieu de déduire cette proposition des théorèmes d'analyse qui sont la conséquence du principe de Dirichlet, Massau en donne une démonstration directe. Il applique ensuite la méthode des transformations au mouvement d'un fluide et il cherche une transformation de l'espace et des vitesses laissant subsister les débits et les flux de tourbillon. Appliquée au mouvement plan, cette transformation conduit à une généralisation de la méthode de la représentation conforme.

Les quelques lignes qui précèdent ne peuvent donner qu'une très vague idée du cours de mécanique de Massau ; il faut lire ces pages, écrites dans un langage clair et concis, pour se rendre compte de la supériorité de sa méthode et des richesses inépuisables contenues dans cet ouvrage. Mais ce qui intéresse les mathématiciens à un degré plus élevé, c'est la multiplicité des questions traitées dans l'*Appendice* du tome I. L'auteur y montre, par une série d'exemples particulièrement bien choisis, les divers problèmes géométriques qui peuvent se résoudre en faisant usage des limites relatives.

Après avoir établi les différences essentielles entre la méthode infinitésimale et la méthode des limites en analyse, l'auteur se demande « s'il n'est pas possible de combiner les deux méthodes pour en former une seule qui soit rigoureuse comme la méthode des limites et qui puisse s'appliquer aux questions géométriques aussi facilement que la méthode des infiniment petits ». La méthode des limites relatives lui paraît réunir ces conditions. Ainsi qu'il le fait encore remarquer « la méthode infinitésimale est plus qu'une justification de la pratique des infiniment petits. L'intuition infinitésimale suffit dans les questions faciles; mais il en est d'autres où l'on risquerait de s'égarer en s'abandonnant à l'intuition infinitésimale, tandis que la méthode des limites relatives conduit toujours au but ».

Il s'occupe d'abord du *problème des tangentes,* et il étudie particulièrement les tangentes aux cissoïdales, aux courbes algébriques, à la strophoïde, à la trisectrice de Mac-Laurin, aux surfaces et aux courbes parallèles, aux courbes diamétrales et à la courbe isoptique. Il donne ensuite ce qu'il appelle la règle suprême des normales aux courbes et aux surfaces.

Le *probème des rayons de courbure* fait l'objet d'un paragraphe spécial. Il y détermine les rayons de courbure des courbes algébriques, des courbes $F(r, P) = 0$ (r est le rayon vecteur, P distance du pôle à la tangente), des podaires et des antipodaires, des roulettes généralisées; il retrouve plusieurs formules établies précédemment par Delaunay, Mannheim et Habich. Dans d'autres problèmes, il traite des rayons de courbure en un point multiple d'une courbe algébrique, des courbes diamétrales, des courbes conchoïdales. Il fait les mêmes recherches relativement aux rayons de courbure des surfaces et particulièrement des surfaces polaires réciproques, des surfaces inverses, des surfaces podaires et antipodaires.

Malheureusement, ces procédés sont peu connus et on ne les trouve pas dans les traités relatifs aux courbes. Il serait à souhaiter que les prochaines éditions des ouvrages suivants : G. Loria, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven;* F.-G. Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables;* H. Wieleitner, *Spezielle ebene Kurven* fassent mention des travaux de Massau et exposent les principes fondamentaux de sa méthode.

Dans le second chapitre de l'Appendice, l'auteur s'occupe des *compléments de géométrie symbolique à trois dimensions.* Il y traite successivement des produits et des moments de vecteurs et en particulier de ce qu'il appelle la formule d'expulsion, de la composition des points, des droites et des aires, de la généralisation des théorèmes des moments, des équations de composition et de leurs applications, des produits régressifs, du produit stationnaire des segments et de certains déterminants relatifs aux distances de 5 points.

Dans un troisième chapitre, il étudie la méthode des quaternions et il prouve que certains symboles dérivés des quaternions sont identiques aux notations vectorielles usitées par lui. Et il ajoute cette observation critique : « La méthode des quaternions ne s'est pas répandue ; il est aisé d'en trouver la raison. Les quaternions peuvent être utilisés en géométrie, en analyse, en mécanique ; pour en tirer le plus grand parti, il faudrait les enseigner dès le début des études mathématiques ; qui oserait tenter une pareille expérience ? On pourrait, il est vrai, sacrifier les applications géométriques et exposer les quaternions comme introduction à la mécanique ; mais, même à ce moment, la théorie des quaternions paraîtrait bien abstraite, et c'est sans doute pour ce motif qu'il n'existe pas encore de traité de mécanique ainsi conçu. » Les mêmes critiques ne s'appliquent pas aux symboles $\Sigma\overline{a}$, $(a\overline{a'})$; aussi ils se sont vulgarisés ; *nous avons l'espoir que le symbole* $M\overline{\mathrm{a}}\overline{\mathrm{a}'}$ *aura le même succès, et alors, on aura tous les avantages des quaternions, sans avoir rencontré leurs difficultés* ».

Il donne ensuite une nouvelle théorie des quaternions, explique les dénominations de verseur et de tenseur et esquisse, d'après Tait, une théorie des quaternions par les verseurs, tout en la critiquant.

Le chapitre suivant, du plus haut intérêt, traite de la *géométrie symbolique à 4 dimensions.*

Massau transporte ses définitions dans ce domaine et, avec une clarté digne d'éloges, il expose les principes de cette partie de la géométrie. Il établit une série de formules généralisant celles qu'il a rencontrées dans la géométrie à trois dimensions et il applique ses résultats à la géométrie à n dimensions. Je ne connais pas d'exposé plus limpide touchant cette géométrie, à laquelle il applique même la généralisation de sa fonction linéaire. Il définit les coordonnées homogènes et les hypercoordonnées ; il s'occupe des transformations géométriques, de l'involution des masses, des segments et des aires, du système focal de réciprocité. Autant d'idées originales, malheureusement trop peu connues !

Enfin, cette étude se termine par l'examen de la méthode de H. Grassmann. Tout en reconnaissant à ce dernier les mérites rappelés par M. Jahnke dans son mémoire cité plus haut, Massau ne partage cependant pas complètement les idées du professeur de Stettin. Dans la critique de l'édition de 1844, le mathématicien belge écrit : « On y lit de longues considérations philosophiques, mais on y cherche en vain une définition bien précise des grandeurs extensives ; on y trouve seulement que le vecteur d'un système à m dimensions peut changer de m manières différentes et indépendantes, qu'il a un commencement β et une fin γ et que, de là, résulte évidemment (?)

$$[\beta\gamma] = [\beta\alpha] + [\alpha\gamma]$$

α étant un autre élément ».

Massau trouve également que les explications de Grassmann relatives à l'harmonie et à la disharmonie des vecteurs sont peu satisfaisantes. « Il est difficile de comprendre, d'après cela, une équation de classe k dans un espace à m dimensions ».

Plus loin, à propos de la seconde partie de *Die lineale Ausdehnungslehre*, Massau ajoute encore : « Il semble que c'est par définition que Grassmann admet que l'on engendre des équations géométriques en multipliant les équations entre les points. Il pose $\alpha\beta = -\beta\alpha$. Ces équations sont aussi vagues que les équations entre les produits de vecteurs. On n'est pas certain qu'en appliquant les règles admises, on n'arrivera pas à des résultats contradictoires ».

A propos de *Die Ausdehnungslehre* de 1862, Massau fait remarquer que, malgré la réclamation de Grassmann relativement à la priorité des clefs de Cauchy, il y a, dans la note de ce dernier, une idée qui n'existait pas chez le maître de Stettin. Comme on le sait, les clefs de Cauchy (*C. R.*, 1853) permettent d'exprimer les déterminants par des produits de quantités complexes. Selon lui, l'idée nouvelle de Cauchy est la base de l'exposition faite par Grassmann en 1862. « En résumé, dit-il, on peut dire que la méthode de Grassmann est la géométrie des points ; les vecteurs n'apparaissent que comme des cas particuliers ; ce sont des points à l'infini. C'est le contraire de la marche que nous avons suivie ; nous avons établi la théorie des vecteurs ; nous en avons déduit après les compositions ».

Pour terminer, mon vénéré maître s'occupe du *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre de Grassmann*, par G. Peano. Et il conclut : « Autant les livres de Grassmann sont obscurs et d'une lecture pénible, autant l'exposition de M. Peano est claire et intéressante. Cependant, nous persistons à croire que la géométrie des points ne peut avoir la simplicité de la géométrie vectorielle; mais c'est, croyons-nous, parce que la méthode de Grassmann est imperfectible, malgré le beau livre de M. Peano ».

Ce rapide exposé ne permet pas de se représenter la valeur de l'œuvre de mon regretté professeur. Pour être complet, j'aurais dû analyser succintement les diverses questions qu'il a effleurées dans ses Compléments de mécanique et dans la Mécanique céleste. Malheureusement, il n'a pu laisser sur ce sujet des leçons écrites et il n'a donné ce cours qu'à des intervalles très irréguliers, par pénurie d'élèves se destinant au doctorat spécial en mécanique. J'ai eu l'occasion de suivre ces leçons; qu'il me suffise d'affirmer que, là encore, son exposition n'a rien perdu de son originalité ni de sa simplicité. En mécanique céleste, il transporte ses notations vectorielles habituelles et la même simplification se produit dans l'exposé sans rien lui faire perdre de sa clarté ni de sa rigueur.

Mes connaissances sont insuffisantes pour pouvoir apprécier l'Intégration graphique de Massau, laquelle fait plutôt partie du domaine des sciences appliquées. M. d'Ocagne, à plusieurs reprises, a rendu hommage à l'élégance et à la profondeur des procédés de Massau. J'en appelle également à l'autorité de mes anciens condisciples, aujourd'hui ingénieurs distingués, qui ne tarissent pas d'éloges sur la beauté des théories du maître.

Au moment où il y a une tendance à uniformiser les notations vectorielles, malgré la divergence d'opinions à ce sujet, qu'il me soit permis de recommander à l'attention des mathématiciens qui s'occupent de cette question, les notations simples de Massau. En étudiant son cours complet de mécanique, on se rend compte du cachet tout spécial de sa méthode. Cela m'étonne même que, dans le tableau des deux mathématiciens italiens (*E. M.*, 1909, p. 41), il ne soit pas fait mention des notations de Resal, de Saint-Venant et de Massau. Selon moi, cela tient à ce que nos auteurs contemporains s'inspirent trop des idées grassmanniennes et hamiltoniennes. Je suis quelque peu effrayé, en parcourant ce tableau, par la diversité et la multiplicité des notations préconisées. Je me demande ce que doit être un cours de mécanique rédigé avec de tels symboles et j'ai quelque peine à me décider à lire un ouvrage de ce genre, habitué comme je le suis aux notations si simples de mon ancien professeur. Que le lecteur ne s'offusque pas de cette prétention de ma part; qu'il n'y voie qu'un hommage rendu à la mémoire de Massau et qu'une revendication en faveur de son œuvre quelque peu délaissée.

Peut-être le simple titre de Cours de Mécanique a-t-il écarté les géomètres; mais il est comme ces fruits dont l'écorce rugueuse cache une chair savoureuse ou un liquide parfumé. Aux géomètres particulièrement, je me permets de recommander la lecture de ce traité de mécanique, qui est autant, si ce n'est plus, un livre de géométrie. Ils y feront une ample moisson de découvertes et y trouveront une quantité de matériaux pour leurs recherches ultérieures.

Du reste, je me propose, si mes loisirs me le permettent, d'emprunter quelque jour encore l'hospitalité bienveillante de cette revue pour faire connaître à ses lecteurs quelques-unes des méthodes du mathématicien belge et en particulier le procédé si inattendu des limites relatives.

J'ai la ferme conviction que son œuvre sera étudiée de plus en plus par ses contemporains et que les générations futures le désigneront comme un novateur et un protagoniste de la méthode vectorielle.

J. Rose (Chimay, Belgique).

POUR UNE THÉORIE DE LA MESURE

(2me article.)[1]

La question des principes de la Géométrie (métrique) a été pleinement résolue par S. Lie, qui a déterminé les conditions auxquelles doit satisfaire un groupe continu de transformations pour définir une métrique euclidienne ou non-euclidienne. La condition essentielle est d'admettre un invariant binaire $J(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2,)$.

Mais un tel groupe de transformations étant entièrement défini par son invariant, il y aurait évidemment économie logique à prendre pour objet des axiomes les fonctions numériques de deux points elles-mêmes. De plus, l'analogie serait ainsi complète avec l'idée de mesure telle qu'elle a été établie pour les continus à une dimension[1], enfin l'on éliminerait ainsi des principes de la géométrie la notion de groupe de transformations, bien complexe comme notion fondamentale, malgré le rôle prépondérant qu'elle joue en réalité au point de vue physique.

La propriété essentielle des *fonctions de distance* (j'adopterais aussi volontiers le terme de *fonctions métriques*) est

---

[1] Voir le 1er article de l'*Enseignement mathématique* du 15 mars 1910; t. XII, p. 89-97.