Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1910)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES SINGULARITÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES UNIFORMES

Autor: Pompeiu, D.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12773

SUR LES SINGULARITÉS
DES FONCTIONS ANALYTIQUES UNIFORMES

Dans ma thèse *Sur la continuité des fonctions de variables complexes* (*Annales de Toulouse*, 2me série, tome VII), j'ai montré, par des exemples, que l'*étendue* de l'ensemble des points singuliers joue un rôle essentiel dans la façon dont se comporte une fonction analytique uniforme aux environs des points singuliers.

Une conséquence inattendue et très importante, c'est que la *continuité* ou la *discontinuité* de l'ensemble des points singuliers n'a pas l'influence qu'on voulait lui attribuer : deux ensembles, l'un *continu* (d'un seul tenant, d'après la terminologie de M. Jordan), l'autre *partout discontinu* (purement ponctuel, d'après M. Painlevé), ayant même étendue, donnent lieu aux mêmes circonstances.

Il est bien entendu que nous excluons de nos considérations les fonctions à *espaces lacunaires* et prenons le mot *point singulier* dans un sens restreint (défini dans ma thèse, deuxième partie).

Dans cette note, je me propose de faire voir qu'en se donnant *a priori* la façon de se comporter d'une fonction analytique uniforme aux environs des points singuliers, il s'ensuit, pour l'*étendue* de l'ensemble des points singuliers, des conditions précises.

§ 1. — I. Supposons qu'on impose à une fonction analytique uniforme $f(z)$ les deux conditions suivantes :

1° La fonction $f(z)$ est *partout continue* (donc continue aussi sur l'ensemble des points singuliers);

2° La dérivée $f'(z)$ est bornée.

On démontre, avec ces hypothèses (voir, par exemple, dans ma thèse, le chap. III de la deuxième partie), que l'ensemble des points singuliers a nécessairement une *aire* non nulle, ou d'une façon plus précise encore : l'aire de l'ensemble est *partout* non nulle.

II. Supposons maintenant qu'on impose à la fonction $f(z)$ seulement la condition d'être *partout continue*.

On démontre, dans ce cas (thèse : chap. III de la première partie) que la *longueur* de l'ensemble des points singuliers est *partout infinie*.

III. Supposons, en troisième lieu, qu'on impose à la fonction $f(z)$ la condition d'être *bornée* dans le voisinage des points singuliers.

On démontre (thèse : premier chapitre de la seconde partie) que la longueur de l'ensemble des points singuliers est *partout non nulle*.

IV. Enfin, pour être certain qu'une fonction analytique uniforme devient *infinie* dans le voisinage de tout point singulier, il *suffit* que l'ensemble des points singuliers ait une *longueur nulle* (thèse : chap. I de la deuxième partie).

§ 2. — Un autre résultat remarquable est relatif aux intégrales

$$J = \int_c f(z)\, dz$$

prises suivant les contours fermés C, ne passant que par des points réguliers z, mais contenant des points singuliers dans la région enfermée. Dans les cas où l'intégrale J a un sens, le contour C peut passer même par des points singuliers.

On démontre (pour les cas I et II, au moyen d'un théorème de Morera[1], pour le cas III voir une note des *Comptes Rendus,* 12 juillet 1909) que *les intégrales* J *ne peuvent pas être toutes nulles* : en d'autres termes, elles caractérisent les singularités contenues dans C.

Il semble que cette proposition souffre une exception dans le cas IV. Mais cela tient au fait qu'en imposant à la fonction

[1] C'est le théorème démontré dans la première partie de ma these : chapitre I. Lorsque j'ai donné ce théorème, dans ma thèse, je le croyais nouveau. Grâce à une obligeante communication de M. le prof. E. Landau, j'ai appris qu'il avait été donné bien avant moi par Morera (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo,* série 2, t. 19, 1886).

la condition d'être infinie, on ne lui impose, au fond, qu'une condition purement négative: *la fonction n'est pas bornée.* En précisant le genre d'infinitude qu'on impose à $f(z)$, la proposition ci-dessus devient applicable. Par exemple, on peut imposer à $f(z)$ la condition de devenir, dans le voisinage de tout point singulier, infinie comme

$$\frac{A}{z - a}$$

pour $z = a$. Dans ce cas on démontre que les intégrales

$$\int_c f(z)\, dz$$

ne peuvent pas être toutes nulles.

D. Pompeiu (Jassy, Roumanie).

SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN BELGIQUE

L'Enseignement mathématique ayant publié, dans le cours de ces derniers temps, plusieurs articles sur l'organisation de l'enseignement mathématique dans divers pays, il m'a paru intéressant de donner également une rapide esquisse de cette question pour la *Belgique.* Je me bornerai toutefois aux *enseignements moyen* et *supérieur.*

1. — L'enseignement moyen. — Degré inférieur.

L'enseignement moyen comprend lui-même *deux degrés:* le degré inférieur et le degré supérieur.

De nombreuses écoles moyennes de l'Etat sont chargées du *degré inférieur.* « Le législateur, en créant ces écoles moyennes, a eu principalement en vue de fournir aux jeunes gens qui se destinent aux carrières commerciales, industrielles et agricoles d'ordre moyen ou aux arts et métiers, une éducation et une instruc-