

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1909)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Kapitel:** Notations rationnelles pour le système vectoriel.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*En résumé*, aucun des essais que nous venons d'examiner n'apporte la solution cherchée; c'était à prévoir. Est-il nécessaire de s'arrêter sur les détails de ces démonstrations? J'en ai souligné les erreurs fondamentales; celles dont je n'ai pas parlé sont moins importantes. Je voudrais pourtant en signaler une qu'un lecteur inattentif pourrait ne pas remarquer.

Admettons pour un moment, avec M. Popoff, qu'on ait réellement  $3y(y + 1) = \text{producteur de cube} = \text{produit de trois nombres consécutifs}$ . M. Popoff en conclut que l'un des nombres extrêmes est égal à 3.

En d'autres termes l'équation indéterminée

$$3y(y + 1) = (x - 1)x(x + 1)$$

n'aurait, d'après M. Popoff, que les deux solutions (entières et positives) suivantes

$$x - 1 = 3 \quad (\text{d'où } y = 4) \quad \text{et} \quad x + 1 = 3 \quad (\text{d'où } y = 1).$$

Pour montrer que cette assertion est inexacte je me bornerai à indiquer la solution  $x = 21$ ,  $y = 55$ . Ici l'erreur est moins apparente.

D. MIRIMANOFF (Genève).

### Notations rationnelles pour le système vectoriel.

A propos du système proposé<sup>1</sup> par MM. BURALI-FORTI  
et MARCOLONGO.

#### 1. -- Lettre de M. TIMERDING (Strasbourg).

Vous voulez bien ouvrir dans votre *Revue* une discussion sur le tableau des *notations rationnelles pour le système vectoriel minimum* proposées par MM. BURALI-FORTI et MARCOLONGO, et que vous avez reproduit dans votre numéro du 15 janvier 1909. Je réponds volontiers à l'invitation de la *Rédaction* et je vous communique en ce qui suit les remarques que j'ai à faire sur cette importante question de l'uniformisation de la notation vectorielle.

D'une manière générale, je peux donner mon adhésion presque entière au système proposé, qui se rapproche beaucoup du procédé provisoire que j'ai adopté moi-même dans mon article pour l'*Encyklopædie der mathemat. Wissenschaften* (tome IV, art. 2) et dans mon livre *Geometrie der Kräfte*, récemment paru chez B. G. Teubner à Leipzig.

<sup>1</sup> Voir l'*Ens. math.* du 15 janvier 1909, XI<sup>e</sup> année, n<sup>o</sup> 1, p. 41-45.

Les notations proposées ont la tendance générale à n'employer que des caractères qui se trouvent dans toutes les imprimeries. D'autre part il est d'un très grand avantage de pouvoir rapprocher aussi typographiquement, autant que possible, les lettres représentant deux vecteurs (ou deux points) liés l'un à l'autre par une des opérations fondamentales. Si au contraire on les sépare par un espace trop grand, les formules perdront beaucoup en clarté et seront beaucoup moins aisées à lire. C'est ce qui m'avait induit à choisir, pour désigner le *produit interne*, un signe  $\times$  égal en forme mais plus petit que celui qui est proposé dans le tableau. Ainsi l'on se garantit l'avantage d'avoir un caractère spécial (qui, le cas échéant, pourrait sans doute être mis facilement sur un autre corps) pour désigner cette opération vectorielle. De même je plaiderais pour la notation  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  du produit vectoriel au lieu de  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , puisque le petit crochet ressemble mieux à un lien qui lie ensemble les deux vecteurs réunis dans l'expression du produit.

La même observation pourrait se faire relativement à la notation  $\mathbf{B} - \mathbf{A}$  que l'on propose pour le vecteur terminé par les deux points  $A, B$  : cette notation s'écrit peut-être mieux sous la forme  $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ . Il faut remarquer ici que les opérations directes sur les points sont extrêmement restreintes dans le système minimum, et le vecteur n'y est la différence de deux points que dans un sens très figuratif, les règles pour le calcul des points n'étant pas établies généralement. Dans le système minimum chaque formule qui ne contient que des symboles de points est absolument privée de sens, si elle ne fait pas suivre immédiatement à chaque point un autre lié au précédent par le signe  $-$ . Par exemple, si  $S$  désigne le centre de gravité d'un triangle  $ABC$  on a

$$\mathbf{A} - \mathbf{S} + \mathbf{B} - \mathbf{S} + \mathbf{C} - \mathbf{S} = 0 ,$$

mais on ne peut pas écrire

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}}{3} .$$

C'est ce qu'on marquerait mieux, me semble-t-il, en écrivant la première formule de la manière suivante

$$\mathbf{A}-\mathbf{S} + \mathbf{B}-\mathbf{S} + \mathbf{C}-\mathbf{S} = 0 ,$$

qui rend visible immédiatement la somme de trois vecteurs en laissant ensemble les caractères qui définissent un seul vecteur.

Ces remarques purement typographiques peuvent paraître un peu hors propos, parce qu'elles n'abordent pas expressément dans les notations proposées; je crois cependant que ces ques-

tions sont d'une très haute importance pour l'orientation facile du lecteur dans un ouvrage d'analyse vectorielle.

Mais si c'est ici un intérêt pratique que je voudrais défendre un peu, je dois, en me plaçant maintenant au point de vue logique, m'opposer formellement à la locution qu'on veut attacher aux différents signes de multiplication. Des lettres qui désignent des entités géométriques ou physiques et qui ont le caractère de substantifs, ne peuvent être liées que par des mots qui s'appliquent à des substantifs, c'est-à-dire par des adverbes ou des prépositions. Ainsi il est tout à fait correct de prononcer  $B - A : B$  moins  $A$ . Mais il est impossible de dire :  $a$  interne  $b$ . Grassmann a trouvé une locution qui me semble absolument satisfaisante :  $a$  en  $b$  ( $a$  in  $b$ ). De même il est contraire à toutes les règles de la langue de dire «  $a$  vecteur  $b$  ». Pour exprimer que  $b$  est joint à  $a$  pour former un nouveau vecteur, je proposerais de dire simplement «  $a$  contre  $b$  ».

Parmi les réfutations des opinions contraires, les observations qui servent à défendre la notation « *mod a* » pour la longueur (grandeur) d'un vecteur  $a$ , ne me semblent pas bien justifiées. La longueur d'un vecteur n'est pas une fonction proprement dite, mais quelque chose qui fait partie de son être, qui ressort si l'on fait abstraction de la direction du vecteur et qui est tout à fait analogue à la valeur absolue d'un nombre. Dans une typographie un peu claire, le danger d'une confusion de la notation  $|a|$  avec des parenthèses me semble illusoire et la notation *mod a* est évidemment plus longue. Il suffit pour le voir de comparer les deux formules

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos(a, b),$$

$$[\text{mod}(a + b)]^2 = \text{mod } a^2 + \text{mod } b^2 + 2 \text{ mod } a \text{ mod } b \cos(a, b).$$

Le système minimum croit pouvoir se passer entièrement du *bivecteur* de GRASSMANN. C'est là un point auquel, peut-être par raison d'une partialité personnelle, je ne peux pas consentir. Je crois que *la notion du bivecteur est absolument indispensable* et de la même importance que le vecteur lui-même. La refuser revient pour moi à refuser les surfaces et à n'accepter que les lignes. Pour plus de clarté, qu'il me soit permis de citer un exemple : la couche magnétique est une notion fondamentale en physique mathématique; pour éviter l'apparence d'une idée non purement mathématique, nous pouvons parler plutôt d'une surface  $\sigma$  divisées en éléments infiniment petits doués chacun d'un sens défini de rotation. Cette notion est impossible à établir sans se servir des idées de Grassmann ou, si l'on veut, de Mœbius, car en remplaçant les éléments  $d\sigma$  par des normales qui leur sont proportionnelles en longueur et qui marquent, d'après une certaine règle, par le sens de leur direction, le sens de la direction de l'élément de surface, on remplace l'idée originale par une autre

qui ne lui est pas équivalente. En effet, on remplace la surface par un amas de petites lignes, ce qui ne permet plus l'intégration, du moins dans le sens ordinaire; de plus on fait usage d'une convention absolument arbitraire relativement à la correspondance des longueurs avec les aires et du sens de direction avec le sens de rotation. Ce n'est que dans l'idée originale que  $d\sigma$  apparaît comme le véritable élément d'une surface  $\sigma$  fixée non seulement par rapport à son aire, mais aussi par rapport à la forme et la situation réciproque de toutes ses parties, de même que  $ds$  est le vecteur infinitésimal qui fait partie d'une ligne  $s$ .

Le produit scalaire  $\mathbf{u} \times \varphi$  d'un vecteur et d'un bivecteur est représenté par le volume du cylindre qui a  $\varphi$  pour base et  $\mathbf{u}$  pour arête. L'intégrale

$$\int_{(\sigma)} \mathbf{u} \times d\sigma,$$

prise par rapport à une surface  $\sigma$ , donne alors le « flux » à travers cette surface, et cette notion me semble indispensable pour la fondation de la théorie vectorielle.

Les auteurs des notations proposées désirent qu'on fasse une distinction très prononcée entre l'opérateur de Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

appliqué à une fonction scalaire et le même opérateur appliqué à une fonction vectorielle, parce que dans ces deux cas il est exprimé d'une manière différente par les opérations *grad*, *div* et *rot* que les auteurs considèrent comme fondamentales.

Mais il faut remarquer que de ces deux expressions l'une devient nécessairement illusoire dans tous les cas, puisque l'opération *grad* ne peut s'appliquer qu'aux scalaires et les opérations *div* et *rot* ne s'appliquent qu'aux vecteurs. Ainsi il serait absolument impossible de trouver une opération quelconque applicable en même temps aux scalaires et aux vecteurs, si l'on demande qu'elle s'exprime de la même manière par les opérations fondamentales. Il y a pourtant un certain intérêt d'économie de conserver de telles opérations auxquelles une grandeur scalaire peut être soumise aussi bien qu'un vecteur. Telle est par exemple la dérivée par rapport à une direction donnée; on peut prendre cette dérivée aussi bien d'une grandeur scalaire  $u$  que d'un vecteur  $\mathbf{u}$ . Elle s'écrit, dans les deux cas, si  $n$  désigne la direction donnée, disons la normale d'une surface proposée, de la manière suivante

$$\frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}.$$

Quant à l'opération  $\Delta$ , il faut aussi considérer que chaque fonction vectorielle  $\mathbf{u}$  du lieu dans l'espace peut être mise sous la forme

$$\mathbf{u} = u \cdot \mathbf{a} + v \cdot \mathbf{b} + w \cdot \mathbf{c} ,$$

en désignant par  $u, v, w$  des fonctions scalaires et par  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  des vecteurs constants linéairement indépendants (non parallèles tous les trois au même plan). Alors on obtient pour l'opération  $\Delta$  appliquée à une fonction vectorielle directement la définition suivante :

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta u \cdot \mathbf{a} + \Delta v \cdot \mathbf{b} + \Delta w \cdot \mathbf{c} ,$$

qui la réduit à l'opération  $\Delta$  pour des fonctions scalaires.

De plus, on doit se demander, comment il faut définir les opérateurs, quand on ne veut pas se servir des méthodes cartésiennes, comme est, à ce qu'il paraît, dans les idées des auteurs. On sait qu'on ne peut arriver de cette manière aux opérateurs *div* et *rot* qu'en tenant compte des formules bien connues de Gauss et de Stokes :

$$\int_{(\tau)} \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\tau = \int_{(\sigma)} \mathbf{u} \times d\sigma ,$$

où  $\sigma$  désigne une surface close et  $\tau$  la partie de l'espace qu'elle contient, et

$$\int_{(\omega)} \operatorname{rot} u \times d\omega = \int_{(s)} \mathbf{u} \times ds ,$$

où  $\omega$  est une surface terminée par la ligne  $s$ . De la première formule on obtient, si l'on pose

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} u ,$$

la suivante :

$$(a) \quad \int_{(\tau)} \Delta u \, d\tau = \int_{(\sigma)} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot d\sigma ,$$

qui sert à définir  $\Delta u$  pour les scalaires. Mais en employant la formule donnée plus haut

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta u \cdot \mathbf{a} + \Delta v \cdot \mathbf{b} + \Delta w \cdot \mathbf{c} ,$$

on trouve immédiatement

$$(b) \quad \int_{(\tau)} \Delta \mathbf{u} \, d\tau = \int_{(\sigma)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \, d\sigma ,$$

où  $d\sigma$  est pris dans le sens d'un simple nombre, de sorte que l'opérateur  $\Delta$  est défini pour les scalaires et pour les vecteurs par

les deux formules (a) et (b), dont la forme est absolument la même. Ainsi il est difficile de voir pourquoi on devrait les désigner différemment.

Mais c'est là tout ce que j'ai à dire contre le système proposé, qui, s'il est adopté généralement, constituera sans doute un grand progrès. Le désaccord actuel dans la terminologie vectorielle est presque sans exemple et ses conséquences sont très graves pour le développement de cette science, parce qu'il rend extrêmement difficile l'étude de toutes les recherches dans l'analyse vectorielle et dans ses nombreuses applications.

Strasbourg, le 22 février 1909.

2. — Réponse de MM. BURALI-FORTI et MARCOLONGO  
à la lettre de M. G. COMBEBIAC.

Le calcul vectoriel est d'une importance fondamentale pour la mécanique et la physique, de même que le calcul algébrique est fondamental pour l'analyse. S'il est donc sans importance de fixer une notation vectorielle, comme M. Combebiac semble croire (v. *L'Ens. mathém.* du 15 janv. 1909, p. 46), il est aussi sans importance d'avoir un seul algorithme en algèbre.

La question de l'unification des notations vectorielles n'a rien de particulier en elle-même. L'importance lui vient par la variété et par le défaut de correction logique et formelle de quelques-unes des notations usuelles. Ces notations sont parfois contraires aux lois algébriques les plus élémentaires et à la nature des entités auxquelles elles s'appliquent; ou bien elles sont improprement déduites des notations, très précises, de Hamilton. Une analyse superficielle montre clairement que ce n'est pas une question de forme; c'est une question tout à fait essentielle.

M. Combebiac a pleine liberté de donner sa préférence aux notations des quaternions et de rejeter celles des homographies; mais nous le prions de vouloir bien réfléchir que les *quaternions*, *entités à quatre dimensions*, ne sont pas des *homographies*<sup>1</sup>; et que, en mécanique et en physique, on doit considérer des *homographies* à 6, 9... dimensions, qui seulement par un calcul indirect et compliqué peuvent être substituées par les quaternions.

<sup>1</sup> BURALI-FORTI : Ignaternioni di Hamilton ed il calcolo vettoriale [*Atti Accademia Torino*, 1908].