Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 11 (1909)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE BASÉE SUR LE GROUPE DES

**DÉPLACEMENTS** 

Autor: Rousseau, Th.

**Kapitel:** Glissements plans rectilignes.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-11850

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF: 24.11.2025** 

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

J'appelle mouvement axial un mouvement défini par des déplacements axiaux. Un tel mouvement est à deux paramètres. J'appelle mouvement helicoïdal un mouvement axial dans lequel l'angle de rotation varie proportionnellement à l'amplitude du glissement.

Après avoir défini deux plans perpendiculaires, on démontrera

les théorèmes suivants:

73. — Théorème. Si deux plans sont perpendiculaires et si d'un point de l'un on abaisse la perpendiculaire D sur l'intersection, cette droite D est perpendiculaire à l'autre plan.

74. — Théorème. Ši deux plans sont perpendiculaires et si par un point de l'intersection on mène la perpendiculaire à l'un, elle

est dans l'autre.

75. — Théorème. Deux perpendiculaires à un même plan sont dans le même plan.

76. — Théorème. Par un point pris hors d'un plan on peut abais-

ser sur ce plan une perpendiculaire et une seule.

77. — Théorème. Si deux plans sont perpendiculaires et si d'un point de l'un on abaisse la perpendiculaire sur l'autre, elle est toute entière dans le premier.

On étudiera ensuite les projections orthogonales, la symétrie, les perpendiculaires et les obliques, les triangles, les trièdres.

## II. — LES TRANSLATIONS

# Glissements plans rectilignes.

78. — Définition. J'appelle espace euclidien, tout espace lobatschefskien qui satisfait au postulat suivant.

79. — Postulat XII. Le groupe des déplacements lobatschefskiens

admet un sous-groupe invariant.

Les déplacements d'un espace euclidien s'appelleront des déplacements euclidiens. Les déplacements du sous-groupe invariant s'appellent des translations.

Un mouvement de translation est un mouvement défini par un

ensemble continu de translations.

80. — Théorème. Toute translation qui laisse un point fixe est la translation identique.

Supposons qu'une translation T laisse fixe un point A. D'après un théorème précédent, cette translation serait équivalente à une rotation  $R_0$ , d'angle  $\alpha$  autour d'un axe  $\mathcal{A}_0$  passant par A.

Je dis que, s'il en était ainsi, toute translation serait une rotation. En effet, une rotation R, d'angle  $\alpha$ , autour d'un axe quelconque  $\Delta$ , peut ètre considérée comme la transformée de la rotation  $R_0$ 

par un des déplacements qui amènent  $\Delta_0$  sur  $\Delta$ . Comme les translations forment un sous-groupe invariant, la rotation R serait encore une translation.

De plus, toutes les rotations d'angle  $\alpha$ ,  $2\alpha$ , ...  $n\alpha$  seraient des

translations, puisque les translations forment un groupe.

Je dis maintenant qu'une rotation R d'angle quelconque serait une translation. Pour le prouver, je vais montrer qu'on peut toujours considérer une rotation quelconque R d'angle  $\rho$  autour d'un axe  $\Delta$ , comme le produit de deux rotations  $R_1$  et  $R_2$ , d'angle  $\alpha$ , autour de deux axes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  concourants en O sur  $\Delta$ . Si on construit en effet les droites  $D_4$  et  $D_2$  telles que

$$D_1 = D \cdot R_1^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$D_2 = D \cdot R_2^{\frac{1}{2}}$$

on sait que  $\Delta$  devra être perpendiculaire à  $D_4$  et  $D_2$  et  $\rho=2\langle D_4\,,\,D_2\rangle$  si  $R=R_4$  .  $R_2$  .

Or le trièdre  $O,DD_1D_2$  est isocèle; ses faces sont égales à  $\frac{\alpha}{2}$  et la base à  $\frac{\rho}{2}$ . Cherchons si on peut construire ce trièdre connaissant  $\frac{\alpha}{2}$  et  $\frac{\rho}{2}$ . Si nous 'menons par D le plan DX perpendiculaire au plan  $D_1D_2$ , nous sommes ramenés à construire le trièdre rectangle  $DD_1X$ . Comme X est la projection de  $D_1$  sur le plan DX, nous devons mener par le point O, dans le plan DX, une semidroite D qui fasse avec  $D_1$  un angle égal à  $\frac{\alpha}{2}$ ; comme l'angle de  $D_1$  avec X est égal à  $\frac{\rho}{4}$  on sait que le problème est possible si

$$\frac{\rho}{4} < \frac{\alpha}{2} < 2^{dr} - \frac{\rho}{4}.$$

Si cette condition est remplie, la rotation donnée R serait le produit de deux rotations  $R_1$  et  $R_2$  d'angle  $\alpha$ . Comme ces rotations seraient des translations, et que les translations forment un groupe, R serait une translation.

Si la condition précédente n'est pas remplie, on peut trouver une rotation R' d'angle  $\rho' = \frac{\rho}{n}$  telle que l'on ait :

$$-\frac{
ho'}{4}<rac{lpha}{2}<2^{dr}-rac{
ho'}{4}$$

en prenant n assez grand. Alors la rotation R' serait une translation et il en serait de même de la rotation  $R = R'^n$ .

Donc, si une translation laissait fixe un point A, sans être la translation identique, toutes les rotations seraient des translations. Par suite un déplacement quelconque serait aussi une translation, puisque tout déplacement est le produit de deux rotations; et le groupe des translations ne serait pas un sous-groupe du groupe des déplacements, mais ce groupe lui-même.

81. — Corollaire. Il y a une translation et une seule qui amène

un point A en un point donné A'.

Soit  $T_0$  une translation quelconque qui amène un point quelconque M en M'. On peut toujours construire un triangle isocèle AA''A' ayant AA' pour base et tel que AA'' = A'A'' = MM'. Effectuons un déplacement qui amène MM' sur AA''. La translation  $T_0$  se transforme en une translation qui amène A en A'' puisque les translations forment un sous-groupe invariant. De même il y a une translation T'' qui amène A'' sur A'. Donc A' provient de A par le produit T'T'', c'est-à-dire par une translation T.

Il n'y a qu'une translation T qui amène A sur A'. S'il y en avait une autre  $T_4$  la translation  $T_4T^{-1}$  laisserait A fixe. Ce serait la

translation identique et on aurait  $T = T_{i}$ .

Une translation est donc clairement désignée par deux points homologues.

82. — Remarque. Pour définir un mouvement de translation il suffit de se donner un ensemble continu de points M' homologues de M et comprenant le point M. Le mouvement peut donc être à 3, 2, 1 paramètres. S'il est à un paramètre, il suffit de se donner la trajectoire du point M. Si cette trajectoire est rectiligne le mouvement de translation est dit mouvement de translation rectiligne.

83. — Théorème. Dans une translation, toute droite qui joint

deux points homologues glisse sur elle-même.

Soient la translation T et un point A. Posons B = AT et C = BT. Désignons par R une rotation quelconque autour de AB de sorte que A = AR, B = BR, C' = CR. Puisque les translations forment un sous-groupe invariant, la transformée de T par R est une translation T', telle que B = AT' et C' = BT'. D'où:

$$B = BT^{-1}T'.$$

Donc  $T^{-1}$  T' est la translation identique. Par suite, comme on a aussi  $C' = CT^{-1}$  T', C' et C sont confondus. Donc C est sur la charnière AB.

84. - Corollaire. Dans un mouvement de translation rectiligne

tous les points décrivent des droites. On appelle ces droites des glissières.

Théorème. Dans une translation, tout plan qui passe par une

glissière glisse sur lui-même.

Considérons en effet la translation T qui amène M en M'. Soit P un semi-plan d'arête MM', P' sa position homologue. P' dérive de P par un mouvement axial A = GR. G étant le mouvement de glissement plan rectiligne de P et de MM' sur eux-mêmes, et d'amplitude MM', R le mouvement de rotation d'angle  $\alpha$  qui amène P sur P'. Considérons le mouvement de translation rectiligne MM'. Puisqu'il est défini par un ensemble continu de translations,  $\alpha$  varie d'une manière continue dans ce mouvement et on peut trouver un nombre entier n assez grand tel que  $\alpha$  passe par la valeur  $\frac{4^{dr}}{n}$  comprise entre zéro et  $\alpha$ . A cet instant le point M est venu en  $M_4$  entre MM', tel que  $MM_4 = a$ , par un mouvement de translation  $T_0$ , qui est un mouvement axial d'amplitude a et d'angle  $\frac{4^{dr}}{n}$ . Dès lors, le mouvement de translation T'' sera un mouvement axial d'amplitude na et d'angle 4dr, et par suite sera équivalent à un glissement plan rectiligne.

Donc toutes les translations d'amplitude na sont des glissements plans rectilignes. Si nous construisons dans le semiplan P le triangle isocèle MM''M' de base MM' et de côtés na, la translation MM'' est un glissement plan rectiligne; de même la translation M''M'. Le produit de ces deux translations, c'est-à-dire la translation MM' est donc aussi un glissement plan rectiligne.

Tout plan passant par une glissière s'appelle un plan de glissement.

85. — Théorème. La transformée d'une translation par une transposition autour d'une perpendiculaire à un plan de glissement est la translation inverse.

Soit O est le pied de la perpendiculaire Oz sur le plan P, et T une translation. Soit O' = OT. La transposition autour de Oz laisse O fixe et amène O' en  $O'_1$  dans le plan P.  $O'_1$  est symétrique de O' par rapport à O. La transformée de T est la translation qui amène O en  $O'_1$ ; c'est manifestement la translation inverse de T.

86. — Théorème. Le produit de deux translations est commutatif. Soit en effet T une translation qui amène O en O'. Puis T' une translation qui amène O' en O". Faisons la transposition autour de la perpendiculaire au milieu de O'O", au plan OO'O". O vient en O", O" en O et O' en O<sub>1</sub>. Or la translation qui amène O en O'<sub>1</sub> est la transformée de celle qui amène O" en O', c'est donc l'inverse de T'<sup>-1</sup>, c'est-à-dire T'. De même la translation qui amène O'<sub>1</sub> en O" est égale à T. Donc TT' = T'T.